

連分数の演算

連分数からの分離

連分数の先頭部分を分数として分離し、一部を級数化する方法を考える。

次式の β を求める。

$$\frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} = \frac{a}{b+c} + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ は連分数})$$

$$\beta = \frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} - \frac{a}{b+c} = \frac{a\alpha}{b\alpha+c} - \frac{a}{b+c} = \frac{ac(\alpha-1)}{(b\alpha+c)(b+c)} = \frac{ac(\alpha-1)}{(b+c)(b(\alpha-1)+b+c)} = \frac{ac}{b(b+c) + \frac{(b+c)^2}{-1+\alpha}}$$

従って

$$\frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} = \frac{a}{b+c} + \frac{ac}{b(b+c) + \frac{(b+c)^2}{-1+\alpha}} \quad \frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} = \frac{a}{b+c} + \frac{ac}{b(b+c) + \frac{(b+c)^2}{-1+\alpha}}$$

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}}} \quad \text{に対して適用すると}$$

$$\pi = \frac{4}{1+1^2} + \frac{4 \cdot 1^2}{1(1+1^2) + \frac{(1+1^2)^2}{-1+3}} + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{4}{2+2} + \frac{4}{2+2} \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{2}{1+2} + \frac{2}{1+2} \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{2}{1+2} + \frac{2 \cdot 2}{1(1+2) + \frac{(1+2)^2}{-1+2}} + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3+1} + \frac{4}{3+1} \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3+9} + \frac{4 \cdot 9}{3(3+9) + \frac{(3+9)^2}{-1+1}} + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{36}{36+2^2} (5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}) \quad (\text{右上に続く})$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{1+2^2} (5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}})$$

$$= 3 + \frac{1}{1+5} + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{6+7} + \frac{3^2}{6+7} \frac{4^2}{9 + \frac{5^2}{11 + \frac{6^2}{13 + \dots}}}$$

$$\frac{4}{1+3} + \frac{1^2}{3+5} + \frac{2^2}{5+7} \text{ の部分が } 3 + \frac{1}{6+} \text{ に変換された。}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \frac{5^2}{11 + \frac{6^2}{13 + \dots}}}}}$$

分離する部分を少し増やして $\frac{a}{b + \frac{c}{d + \alpha}} = \frac{a}{b+c} + \beta$ の β を求める。

$$\beta = \frac{a}{b + \frac{c}{d + \alpha}} - \frac{a}{b+c} = \frac{a(d+\alpha)}{b(d+\alpha)+c} - \frac{ad}{bd+c} = \frac{ac\alpha}{(b(d+\alpha)+c)(bd+c)} = \frac{ac}{b(bd+c) + \frac{(bd+c)^2}{\alpha}}$$

従って

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d + \alpha}} = \frac{ad}{bd+c} + \frac{ac}{b(bd+c) + \frac{(bd+c)^2}{\alpha}} \quad \frac{a}{b + \frac{c}{d + \alpha}} = \frac{ad}{bd+c} + \frac{ac}{b(bd+c) + \frac{(bd+c)^2}{\alpha}}$$

$$\pi = \frac{4}{1+3} + \frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{7} + \frac{3^2}{9} + \dots \quad \text{に対して適用すると}$$

$$\pi = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3+1^2} + \frac{4 \cdot 1^2}{1(1 \cdot 3+1^2)} + \frac{(1 \cdot 3+1^2)^2}{2^2} \left(5 + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

$$= 3 + \frac{4}{4+2^2} \left(5 + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{1+4} \frac{4}{7} \left(5 + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

(右上に続く)

$$\pi = 3 + \frac{1}{1+5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots$$

前記の式よりも速く次式の結果を得た。

$$\pi = 3 + \frac{1}{6} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \frac{5^2}{11} + \frac{6^2}{13} + \dots$$

分離した部分を乗積化する式は、より簡潔である。

$$\frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} = \frac{a}{b+c} \left(1 + \frac{c}{b + \frac{b+c}{-1+\alpha}}\right)$$

$$\frac{a}{b + \frac{c}{\alpha}} = \frac{a}{b+c} \left(1 + \frac{c}{b + \frac{b+c}{-1+\alpha}}\right)$$

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d+\alpha}} = \frac{a}{bd+c} \left(d + \frac{c}{b + \frac{bd+c}{\alpha}}\right)$$

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d+\alpha}} = \frac{a}{bd+c} \left(d + \frac{c}{b + \frac{bd+c}{\alpha}}\right)$$

$$\pi = \frac{4}{1+3} + \frac{1^2}{5} + \frac{2^2}{7} + \frac{3^2}{9} + \dots \quad \text{に対して適用すると}$$

$$\pi = \frac{4}{1+1^2} \left(1 + \frac{1^2}{1 + \frac{1+1^2}{-1+3}} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{1+2} + \frac{2}{5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots$$

前記の途中式になる。

$$\pi = \frac{4}{1 \cdot 3+1^2} \left(3 + \frac{1^2}{1} + \frac{1 \cdot 3+1^2}{2^2} \left(5 + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)\right)$$

$$= \frac{4}{4} \left(3 + \frac{1}{1+4} + \frac{4}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots\right)$$

$$= 3 + \frac{1}{1+5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots$$

$$= 3 + \frac{1}{6} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \dots$$