

分母が1の連分数

分母が1で分子が±1の連分数を考える。値が整数になる例は

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 3$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = -1$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 4$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 0$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = -2$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = 5$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = -3$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = 3$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = 3$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = 3$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = -1$$

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = -1$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = -1$$

次に上記の結果を連分数の分母の整数に代入出来るかを考える。

$\sqrt{2}$ の近似分数である $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1.4$ の左側の2に $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$ を代入すると

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = 1.4$$

となるが、連分数の形が崩れてしまう。

連分数にするため、無理やり一番下に1/2を加算すると、値が変化してしまう。

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = 1.6$$

連分数の形を保ちながら、値が変化しない条件を考える。例えば
 $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$ = 3 に対しては 一番下にaを加算(1+a)した連分数の値が
 元の連分数の値にaを加算した3+aに
 等しければよい。

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} + a$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}}} = 3+a$$

計算を楽にするため、先に分子が3個の連分数の性質を調べる。

'+++'のタイプは、最後の分母に2を加えた値に等しい。

'+--'のタイプは、最後の分母の符号を反転して2を加えた値に等しい。

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{b}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} = 1 + \frac{b+1}{1} = b+2$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{b}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{b-1}} = 1 + \frac{b-1}{-1} = -b+2$$

'---+'のタイプは、最後の分母の符号を反転した値に等しい。

'----'のタイプは、最後の分母の値に等しい。

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{b}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = 1 - \frac{b+1}{1} = -b$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{b}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{b-1}} = 1 - \frac{b-1}{-1} = b$$

整理すると

タイプ	値
+ - +	b+2
+ - -	-b+2
- - +	-b
- - -	b

$$1 + \frac{f_1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{f_3}{b}}} = f_1 f_3 b + (1 + f_1)$$

f_1, f_3 は±1

先程の $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}}}$ は'+++'のタイプで、値は1+aに2を加えた3+aである。

5に対しては以下の通り。7, 9, 11, ...に対しても同様に、'+++'のタイプを付加する毎に値が2増加する。

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 5$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}}}}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3+a}}} = 5+a$$

