

偶数ベルヌーイ数の生成規則である「クラウゼン・フォンシュタウトの定理」を図解する。

各列の素数pに対して「p-1の倍数となるkの行にp」（下図では□）を置くと  $B_k = C_k - \sum 1/p$

$C_k$	p-1	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	
	p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	25	27	29	31	35	37					
1	2	■	■																		
1	4	■	■	■																	
1	6	■	■	■	■																
1	8	■	■	■	■	■															
1	10	■	■	■	■	■	□														
1	12	■	■	■	■	■	■	■													
2	14	■	■	■	■	■	■	■	□												
-6	16	■	■	■	■	■	■	■	■	□											
56	18	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□										
-528	20	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□									
6193	22	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□								
-86579	24	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□							
1425518	26	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□						
-27298230	28	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□					
601580875	30	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□				
-15116315766	32	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□			
429614643062	34	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□		
-13711655205087	36	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	□	
整数部分	k	分数部分（素数の逆数和）																			

p-1が6以下の場合はpを縦に置き、10以上の場合はkがp-1の1倍、2倍、3倍…の斜線上に置く事も可能。

具体的な計算

$$B_2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad B_4 = B_2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30} \quad B_6 = B_2 - \frac{1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \quad B_8 = B_4 = -\frac{1}{30}$$

ここまでは分子が1となる。その理由は計算に使用する2, 3や5, 6, 7が連続しているためである。

$$B_{10} = B_2 - \frac{1}{11} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66} \quad B_{12} = B_4 - \frac{1}{13} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{13} = -\frac{7+13}{30 \cdot 13} = -\frac{20}{390} = -\frac{91+600}{30 \cdot 91} = -\frac{691}{2730}$$

分子の数字は  $3-2=1$ ,  $5-3 \cdot 2 = -1$ ,  $7-3 \cdot 2 = 1$ ,  $5-3 \cdot 2 = -1$ ,  $11-3 \cdot 2 = 5$ ,  $-13 \cdot 7 - (13+7) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = -691$

$B_{14}$ 以降は整数部分が急激に大きな数になるが、分数部分は同様の計算が続く。

14, 26, 34は素数の2倍であり+1した数が合成数のため、 $B_{14}, B_{26}, B_{34}$ の対象素数は $B_2$ の場合と等しい。

$B_{24}$ の対象素数は $B_{12}$ の場合と等しいが、 $B_{36}$ の対象素数は19と37が加わる。

分母と分子に同じ素数を使用した分数式で表現すると

$B_2 = -\frac{2-3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$	$B_4 = B_8 = -\frac{2 \cdot 3 - 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{30}$	$B_{16} = -7 - \frac{2-3}{2 \cdot 3} - \frac{5+17}{5 \cdot 17} = -\frac{3617}{510}$
$B_{14} = 1 - \frac{2-3}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$	$B_6 = -\frac{2 \cdot 3 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{42}$	$B_{18} = 55 - \frac{2-3}{2 \cdot 3} - \frac{7+19}{7 \cdot 19} = \frac{43867}{798}$
$B_{12} = -\frac{2 \cdot 3 - 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{7+13}{7 \cdot 13} = -\frac{691}{2730}$	$B_{10} = -\frac{2 \cdot 3 - 11}{2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{5}{66}$	$B_{20} = -529 - \frac{2-3}{2 \cdot 3} - \frac{5+11}{5 \cdot 11} = -\frac{174611}{330}$

ベルヌーイ数の整数部分

整数部分 $C_k$ の各種近似式を比較する。

小数点第3位未満を切り捨てて表示

k	$C_k$	$2 \prod_{m=1}^k \frac{m}{2\pi}$	$1 - 2 \prod_{m=1}^k \frac{m i}{2\pi}$	$1 - (-1)^{k/2} 2 \prod_{m=1}^k \frac{m}{2\pi}$	$\lfloor \frac{3}{2} - (-1)^{k/2} 2 \prod_{m=1}^k \frac{m}{2\pi} \rfloor$
2	1	0.101	1.101	1.101	1
4	1	0.030	0.969	0.969	1
6	1	0.023	1.023	1.023	1
8	1	0.033	0.966	0.966	1
10	1	0.075	1.075	1.075	1
12	1	0.253	0.746	0.746	1
14	2	1.166	2.166	2.166	2
16	-6	7.092	-6.092	-6.092	-6
18	56	54.970	55.970	55.970	56
20	-528	529.123	-528.123	-528.123	-528
22	6193	6192.121	6193.121	6193.121	6193
24	-86579	86580.247	-86579.247	-86579.247	-86579

$|C_k|$ の概算値  $i$ は虚数単位 実数を使用した式 四捨五入用に左式+1/2

右端の式の値はkが28まで正しい。

$$1 - 2 \prod_{m=1}^{28} \frac{m i}{2\pi} = -27298229.966$$

$$1 - 2 \prod_{m=1}^{30} \frac{m i}{2\pi} = 601580874.340$$

より正確な近似式はゼータ関数値を使用する。

$$C_k \doteq \lfloor \frac{3}{2} - 2 \zeta(k) \prod_{m=1}^k \frac{m i}{2\pi} \rfloor$$

$$1 - 2 \zeta_{-}(30) \prod_{m=1}^{30} \frac{m i}{2\pi} = 601580874.900$$

$$1 - 2 \zeta_{-}(600) \prod_{m=1}^{600} \frac{m i}{2\pi} =$$

$\zeta_{-}(k)$ はユーザー定義のゼータ関数(kが正の場合は偶数)

-312893071899365835639848270531738180830149916119339451808759177399170745277375789947189220300  
 9628212907638784204987525063171767610226222309185372727714234667985795455245492600663181533191  
 0736310098144838480436962901567910528692729050169553294346300333761489275759191208394762229191  
 9054983847804503236080932724953126459577003251158748354633790458392524422193991485040059516978  
 2200607842909238144556274711140471447323243457651918782034176233005519109202142322351787448202  
 5757695422340639441789956937633966112685678740604705998542323389186805451243695323444935702721  
 7755361520244673764675479632566566318492123815429856511222017727511347541765212919682183780540  
 8377663731212754983919173310817013595609939374148550933272426078805639510165659997985627108719  
 6612773392243677933584014039651547985555371393537592433246037731851817316828892537508300729918  
 1455711030982462586108612012065261330309639504330956419667696054869472700713085968582.435

四捨五入すると <https://oeis.org/A000146/b000146.txt> に記載されている300の場合の値と一致する。

kが偶数の場合  $B_k = -\frac{2 \zeta(k) k!}{(2\pi i)^k}$  の関係より、整数部分の近似式を導いている。

$C_2$ から $C_{100}$ までを計算して次頁で表にする。ゼータ関数値の代替として、3個の素数によるオイラー積を使用している。この式の値はkが114まで正しい。

C<sub>k</sub>の値

k	$\lfloor \frac{3}{2} - (-1)^{k/2} \frac{2}{2^k-1} \frac{3^k}{3^k-1} \frac{5^k}{5^k-1} \prod_{m=1}^k \frac{m}{\pi} \rfloor$
2	1
4	1
6	1
8	1
10	1
12	1
14	2
16	-6
18	56
20	-528
22	6193
24	-86579
26	1425518
28	-27298230
30	601580875
32	-15116315766
34	429614643062
36	-13711655205087
38	488332318973594
40	-19296579341940067
42	841693047573682616
44	-40338071854059455412
46	2115074863808199160561
48	-120866265222965259346026
50	7500866746076964366855721
52	-503877810148106891413789302
54	36528776484818123335110430844
56	-2849876930245088222626914643290
58	238654274996836276446459819192193
60	-21399949257225333665810744765191096
62	2050097572347809756992173309567231026
64	-209380059113463784090951852900279701846
66	22752696488463515559649260352769264581471
68	-2625771028623957604730304973615820208144899
70	321250821027180325182047923042649852435219412
72	-41598278166794710913917074495262358936689603010
74	5692069548203528002388345621912105864448051297182
76	-821836294197845756922906534686173330145508927628859
78	125029043271669930167323398297028955241771963644484776
80	-20015583233248370274925329198813298768724220132825915914
82	3367498291536437423339667690333875301621959894719384367233
84	-594709705031354477186604968440515408405790715651069049904703
86	110119103236279775595641307904376916046305114442231488626999498
88	-21355259545253501188658385019041065678973298739163469211804590303
90	4332889698664119241961661305937920621845136851180910914498655788034
92	-918855282416693282262005552155018971389603889162719959591004487113436
94	203468967763290744934550279902200200659751402533782770239369184214108242
96	-47003833958035731078575255535006060654596737369759057915139763564120483353
98	11318043445484249270675186257733934267890365954750747918178993541665491176374
100	-2838224957069370695926415633648176473828468092801288212822853171446486511107027