

同じ値

一見すると別の値に見える式で、実は同じ値を持つものがある。

$$\frac{1}{(e-1)} + \frac{1}{(e-1)^2} = 0.92067359420779231894$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{e}-1)} + \frac{1}{(\frac{1}{e}-1)^2} = 0.92067359420779231894$$

$$\frac{e}{(e-1)^2} - \frac{6e^2}{(e-1)^3} + \frac{6e^3}{(e-1)^4} = 6.0065127966367601482 \quad \inf=100 \sum_{k=0}^{\inf} \frac{k^3}{e^k} = 6.0065127966367601482$$

$$\frac{e}{(e-1)^2} + \frac{6e}{(e-1)^3} + \frac{6e}{(e-1)^4} = 6.0065127966367601482 \quad 3! - \sum_{k=0}^{\inf} \frac{B_-(k+4)}{k!(k+4)} = 6.0065127966367601482$$

$B_-(n)$  はベルヌーイ数

$$\frac{1}{(e-1)} + \frac{7}{(e-1)^2} + \frac{12}{(e-1)^3} + \frac{6}{(e-1)^4} = 6.0065127966367601482$$

$$-\frac{e}{(e-1)} + \frac{7e^2}{(e-1)^2} - \frac{12e^3}{(e-1)^3} + \frac{6e^4}{(e-1)^4} = 6.0065127966367601482$$

$$e + \sin^{-1} \sin e = 3.14159265358979$$

$$\pi + \sin^{-1} \sin(e+3\pi) = 2.71828182845904$$

$$3 + \sin^{-1} \sin 3 = 3.14159265358979$$

$$\frac{e+\pi}{2} + \frac{\sin^{-1} \sin(e+\pi)}{2} = 2.71828182845904$$

$$\frac{e\pi}{3} + \frac{\sin^{-1} \sin e\pi}{3} = 3.14159265358979$$

$$\frac{e+2\pi}{\pi/2} \sin^{-1} \cos \frac{\pi^2}{e+2\pi} = 2.71828182845904$$

$$\frac{e^\pi}{7} + \frac{\sin^{-1} \sin e^\pi}{7} = 3.14159265358979$$

数を分解すると

$$199 = (19 \cdot 9) + (19+9) = (1 \cdot 99) + (1+99)$$

$$169 = (16 \cdot 9) + (16+9) \quad 169 = 13^2 \quad 16 \cdot 9 = 12^2 \quad 16+9 = 5^2 \quad 16 = 4^2 \quad 9 = 3^2$$

$\pi/6$  と  $(\ln 3)/2$  の関係

$$\frac{\pi}{6} = \frac{E_0}{1!} \left(\frac{\ln 3}{2}\right) + \frac{E_2}{3!} \left(\frac{\ln 3}{2}\right)^3 + \frac{E_4}{5!} \left(\frac{\ln 3}{2}\right)^5 + \frac{E_6}{7!} \left(\frac{\ln 3}{2}\right)^7 + \dots$$

$$\frac{\ln 3}{2} = \frac{E_0}{1!} \left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{E_2}{3!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{E_4}{5!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{E_6}{7!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^7 + \dots \quad E_n \text{ や } E_-(n) \text{ はオイラー数}$$

$$\pi/6 = 0.523598775598299$$

$$(\ln 3)/2 = 0.549306144334055$$

$$\sum_{k=0}^{50} \frac{E_-(2k)}{(2k+1)!} \left(\frac{\ln 3}{2}\right)^{2k+1} = 0.523598775598299$$

$$\sum_{k=0}^{50} \frac{(-1)^k E_-(2k)}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2k+1} = 0.549306144334055$$

## πによるeの数字

$$((\pi^1+3)/\pi^5+\pi^7)9 = \underline{27182.8196734497}$$

$$(\pi^4+\pi^5)^{1/6} = \underline{2.71828180861191}$$

$$3(\pi+2)^{\pi-1}\pi^7 9 = \underline{2718281.38660858}$$

## eに隠れたフィボナッチ数 1, 1, 2, 3

$$\frac{1}{9999(30-11e)+1} e = 2.7182818284 \quad 0.00\underline{10102030818182803038} \quad 8\text{の位置や8の前後に存在するのは不思議だ}$$

01010203と続く理由は、eの近似分数

$$1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{11} + \frac{1}{9999} = 2.7182818281828182818$$

をeの部分に代入すると、フィボナッチ数を生成する分数になるからである。

$$\frac{1}{9999(30-11(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{11}+\frac{1}{9999}))+1} = \frac{10}{9899} = 0.0010102030508132134559$$

参考：規則性や理由は良く解らないが、0と1以上の数字を繰り返す数値の例。

$$1/e^{3\pi} = 0.0000806995175703046$$

$$1/e^{3\pi} + 1/e^{6\pi} = 0.0000807060299824407$$

$$1/e^{3\pi} + 1/e^{6\pi} + 1/e^{9\pi} = 0.0000807060305079892$$

$$1/e^{3\pi} + 1/e^{6\pi} + 1/e^{9\pi} + 1/e^{12\pi} = 0.0000807060305080316$$

$$\frac{1}{e^{3\pi-1}} = 0.0000807060305080316$$

$$2\phi^{2(\pi-2)} = 6.00050090060154$$

φは黄金比

## 整数に近い数値

1, 2, 3, 4, 5を使用  $4\sqrt[3]{2}/5 + 5/4\sqrt[3]{2} - 1/2(4 \cdot 5)^3 = 1.999999997396$

左右対称な分母  $\sqrt[3]{\frac{7}{58}} + \sqrt[3]{\frac{11}{85}} = 0.999999993903498 \quad \sqrt[3]{\frac{62}{499}} + \sqrt[3]{\frac{125}{994}} = 0.99999999999458$

指数にe+πあり  $10 \cdot 3^{(e+\pi)/4} - 3^{(e+\pi)/2} = 24.9999999927547$

$$10/3^{(e+\pi)/4} - 25/3^{(e+\pi)/2} = 0.9999999997101$$

## 142857の成り立ち

代表的な巡回数あるいはダイヤル数として知られる数が 142857 である。

142857 · 1 = 142857	142857 · 1 = 142857	
142857 · 2 = 285714	142857 · 5 = 714285	7      1      4
142857 · 3 = 428571	142857 · 4 = 571428	5      8      2
142857 · 4 = 571428	142857 · 6 = 857142	8
142857 · 5 = 714285	142857 · 2 = 285714	154623 / 777 = 199
142857 · 6 = 857142	142857 · 3 = 428571	142857 · 7 = 999999

$1/7 = 0.142857142857142857\dots$  の小数部分に出現する。3の倍数(0, 3, 6, 9)は存在しない。

このような性質を持つ 142857 自身の成り立ちは

「14の2倍が次の28で、その2倍の56と次の112からの繰り上がりの1を足したものが57」となっている。

別の見方で、7とは関係なく1, 2, 4, 8, …と2のべき乗数で構成されていると考えると、

「102と4004を2倍ずつ増やした数の加算」である。

	0. 102                      = 0. 102
0. 14 (2/100) <sup>0</sup> = 0. 14	0. 04004 (2/100) <sup>0</sup> = 0. 04004
0. 14 (2/100) <sup>1</sup> = 0. 0028	0. 04004 (2/100) <sup>1</sup> = 0. 0008008
0. 14 (2/100) <sup>2</sup> = 0. 000056	0. 04004 (2/100) <sup>2</sup> = 0. 000016016
0. 14 (2/100) <sup>3</sup> = 0. 00000112	0. 04004 (2/100) <sup>3</sup> = 0. 00000032032
0. 14 (2/100) <sup>4</sup> = 0. 0000000224	0. 04004 (2/100) <sup>4</sup> = 0. 0000000064064
0. 14 (2/100) <sup>5</sup> = 0. 000000000448	0. 04004 (2/100) <sup>5</sup> = 0. 000000000128128
0. 14 (2/100) <sup>6</sup> = 0. 00000000000896	0. 04004 (2/100) <sup>6</sup> = 0. 00000000000256256
0. 14 (2/100) <sup>7</sup> = 0. 0000000000001792	0. 04004 (2/100) <sup>7</sup> = 0. 0000000000000512512
⋮	⋮
0. 142857142857…	0. 142857142857…

式で確認すると

$$\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = \frac{7}{50-1} = \frac{14}{100-2} = \frac{14/100}{1-2/100} = 0.14 \left( 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2^2}{10^4} + \frac{2^3}{10^6} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{7} = \frac{102}{1000} + \frac{4004}{1000(100-2)} = 102/10^3 + \frac{4004/10^5}{1-2/100} = 0.102 + 0.04004 \left( 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2^2}{10^4} + \frac{2^3}{10^6} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{7 \cdot 0.14} = 1.0204081632653 \qquad \left( \frac{1}{7} - 0.102 \right) / 0.04004 = 1.0204081632653$$

7と020408…と142857の関係は

$$7 \cdot 020408 + 1 = 142857 \qquad 7 \cdot 020408163264 + 9 = 142857142857$$

$$7^2 \cdot 020408 + 8 = 1000000 \qquad 7^2 \cdot 020408163264 + 8^2 = 1000000000000 \qquad 7 \cdot 142857 + 1 = 1000000$$

$$142857^2 = (142858-1)142857 = 142858(7 \cdot 020408 + 1) - 142857 = 020408 \cdot 7 \cdot 142858 + 1 = 020408 \cdot 1000006 + 1$$

$$142857^2 = 20408122449 \qquad 142857142857^2 = 20408163265265306122449$$

## √2の成り立ち

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309 \quad \begin{array}{cccc} 2 \cdot 7 & 2 \cdot 7 & 3 \cdot 7 & 5 \cdot 7 \dots \\ 1.4 & 14 & 21 & 35 \dots \end{array}$$

√2を小数表示した場合、先頭は7の倍数が続く。その理由は

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{7}{5} \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{49}} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{100}{98}} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{1}{1-2/100}} = \frac{7}{5} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{100} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{2}{100} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left( \frac{2}{100} \right)^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{14}{10} \left\{ 1 + \frac{1}{1! \cdot 100} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 100^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 100^3} + \dots \right\} = \frac{7}{10} \left\{ 2 + \frac{2}{100} + \frac{3}{100^2} + \frac{5}{100^3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

従って

$$\sqrt{2} = 7 \left( \frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^5} + \frac{5}{10^7} + \dots \right) \quad \frac{\sqrt{2}}{7} = 0.202030508910442$$

5番目は  $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 / 4! = 35/4 = 8.75$  となり、7の整数倍にはならない。  $7 \cdot 8.75 = 61.25$

6番目は  $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 / 5! = 63/4 = 15.75$        $8.75 + 0.1575 = 8.9075$        $7 \cdot 0.1575 = 1.1025$

参考：収束が速い交代級数がある。分子の係数は同じで、分母は10と異なる。

$$\begin{aligned} 17 \left( \frac{2}{24} - \frac{2}{24^3} + \frac{3}{24^5} - \frac{5}{24^7} \right) &= 1.41421356231696 & 2^2+2 &= 6 & 2 \cdot 2 &= 4 \\ 577 \left( \frac{2}{816} - \frac{2}{816^3} + \frac{3}{816^5} - \frac{5}{816^7} \right) &= 1.414213562373095048801657 & 6^2-2 &= 34 & 4 \cdot 6 &= 24 & 34/2 &= 17 \\ & \sqrt{2} = 1.414213562373095048801688 & 34^2-2 &= 1154 & 24 \cdot 34 &= 816 & 1154/2 &= 577 \end{aligned}$$

## √5と√2の関係

√5 = 2.236067977 と、似た数字を持つ  $\sqrt{2}/7 = 0.2020305089$  の関係を調べる。

√2で扱った分子の係数は  $2\sqrt{1+2/(10^n-2)}$  の値の中に出現する。

この式は  $2 < n$  では  $2\sqrt{500\dots/499\dots}$  の形であるが、 $n=1, 2$  の場合は良く知られた数になる。

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+2/(10^6-2)} &= 2.0000020000030000050000087500157500288750536251005 \\ 2\sqrt{1+2/(10^6-2)} &= 2\sqrt{500000/499999} = 2.000002000003 \\ 2\sqrt{1+2/(10^2-2)} &= 2\sqrt{50/49} = 10\sqrt{2}/7 = 2.020305089104 \\ 2\sqrt{1+2/(10^1-2)} &= 2\sqrt{5/4} = \sqrt{5} = 2.236067977499 \end{aligned}$$

√2/7の数字の並びが√5と似ているのは偶然では無く、この様な関係が存在するからである。

√5が2.235…ではなく、2.236…となる理由は右の通り。

$$\begin{array}{r} 2.235875 \\ 0.0001575 \\ \hline 2.2360325 \end{array}$$

参考：  $3^{(e+\pi)/8} = 2.2360619\dots$

自然数と奇数で構成した√5と√2の式は、殆ど同じ形式である。

$$\begin{aligned} 2 \left\{ 1 + \frac{1}{10} \left( 1 + \frac{3}{20} \left( 1 + \frac{5}{30} \left( 1 + \frac{7}{40} \left( 1 + \frac{9}{50} \left( 1 + \frac{11}{60} \right) \right) \right) \right) \right) \right\} &= 2.2360613 \\ & \sqrt{5} = 2.2360679 \\ 1.4 \left\{ 1 + \frac{1}{100} \left( 1 + \frac{3}{200} \left( 1 + \frac{5}{300} \left( 1 + \frac{7}{400} \left( 1 + \frac{9}{500} \left( 1 + \frac{11}{600} \right) \right) \right) \right) \right) \right\} &= 1.414213562372712 \\ & \sqrt{2} = 1.414213562373095 \end{aligned}$$

参考：  $2 \left\{ 1 + \frac{1}{1} \left( 1 + \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{3}{5} \left( 1 + \frac{4}{7} \left( 1 + \frac{5}{9} \left( 1 + \dots \right) \right) \right) \right) \right) \right\} = \pi + 4$

## √6の成り立ち

√6は2.5に近い値であるが、その差は  $2.5 - \sqrt{6} = 0.0505102572168221$  であり、先頭は5の倍数が多い。  
 5で割る代わりに2倍すると  $5 - 2\sqrt{6} = 0.101020514433644$  とカタラン数が出現する。  
 この数値は10を分母に持つ連分数と等しい。

$$\frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10}}}}} = 0.101020514422576$$

$$\frac{1}{2} \left( 5 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10}}}}} \right) = 2.44948974278317$$

√2と同様に√6も7との関係が深い。 $6 = (7^4 - 1) / 400$  であるので

$$\sqrt{6} = \frac{1}{20} \sqrt{7^4 - 1} = \frac{7^2}{20} \sqrt{1 - 1/7^4} = \frac{7^2}{20} \left( 1 - \frac{1}{2 \cdot 7^4} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7^8} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^{12}} + \dots \right) = \frac{1}{10} \left( \frac{7^2}{2} - \frac{1}{4 \cdot 7^2} + \frac{1}{16 \cdot 7^6} - \frac{1}{32 \cdot 7^{10}} + \dots \right)$$

$49/2 - 1 = 23.5$	←1を引いて値を調整する
$1 - 1/4 \cdot 7^2 = 0.99489795$	←負数を正数にするために1を加える
$1/16 \cdot 7^6 = 0.0000005312$	
<u>24.49489...</u>	

7進法では規則性がはっきりする。√6の10倍の値は

$$(13)_7 \sqrt{(6)}_7 = (33.3315151212104)_7$$

$(13)_7 = 10$	$(33)_7 = 24$	$(15)_7 = 12$	$(12)_7 = 9$
	$(3333)_7 = 1200$	$(1515)_7 = 600$	$(1212)_7 = 450$

$$\sqrt{6} = 2.44948974278317$$

10進法に戻ると√6の近似分数は  $\frac{120}{7^2} + \frac{60}{7^6} + \frac{45}{7^{10}} = 2.44948974272786$

√6/7<sup>2</sup>の値は0.04998958658であるが、先頭には7<sup>2</sup>(49)とその2倍(98)が現れている。

√6/7<sup>4</sup> = 0.00102019564464105 と√6の先頭は7<sup>4</sup>の倍数になる。

$6 = (7^8 - 1) / 960800$  が成り立つ。  $\sqrt{960800} = 980.2040603$  で  $1/980 = 0.001020408163$

√6を7<sup>4</sup>=2401の倍数で表すと、**c=1.956** として

$1 \cdot 7^4 / 10^3 = 2.401$
$2 \cdot 7^4 / 10^5 = 0.04802$
$c \cdot 7^4 / 10^7 = 0.00046963$
<u>2.449489...</u>

49と98は√6の連分数にも登場する。

$$\frac{1}{20} \left( 49 - \frac{1}{98 - \frac{1}{98 - \frac{1}{98 - \frac{1}{98}}}} \right) = 2.4494897427831780981$$

## $\sqrt{3}$ の成り立ち

$\sqrt{3}$ の先頭は $7^5$ の倍数になる。  $\sqrt{3}/7^5 = 0.000103055322637524$   $7^5 = 16807$

$3 = (7^{10} - 1) / 94158416$  であり  $\sqrt{94158416} = 9703.525957$  と  $1/9 \times 0 \dots$  のパターンになる。

$$1/\sqrt{94158416} = 0.000103055322819939$$

規則的な数値の  $\sqrt{2}/7 = 0.202030508910442$  と、規則的な数値の  $\sqrt{6}/7^4 = 0.00102019564464105$

の積もまた規則的である。  $\sqrt{12}/7^5 = 0.000206110645275049$   $\sqrt{3}/7^5 = 0.000103055322637524$

$\sqrt{3}$ を $7^5=16807$ の倍数で表すと

$$\begin{array}{r} 1 \cdot 7^5 / 10^4 = 1.6807 \\ 3 \cdot 7^5 / 10^6 = 0.050421 \\ 5 \cdot 7^5 / 10^8 = 0.00084035 \\ 53 \cdot 7^5 / 10^{10} = 0.0000890771 \\ \hline 1.732050 \dots \end{array}$$

---

## $\sqrt{6}$ と $\sqrt{2}$ と7の関係

$\sqrt{6}$ の先頭小数部分は、 $\sqrt{2}$ の値に単純な演算を加えたものである。

$\sqrt{2}$	→	1.414213562		
		0.202030509	1/7倍	$\sqrt{2}$ を7で割って、二桁毎に $2^k$ 倍すると $1/\sqrt{6}$ になる。
		2481632	$1/7^2 = 0.0204081632$	ただし先頭10桁程度で、末尾は誤差を含む。
$1/\sqrt{6}$	←	0.408248288	$2^k$ 倍 (二桁毎)	
$\sqrt{6}$	←	2.449489728	6倍	

## 平方根と二項係数の関係

$\sqrt{6}$ の値は二項係数の単純な積和である。  
 パスカルの三角形の中央の数を2.4倍し、  
 二桁(1/100)ずらしていくと、その和が  
 $\sqrt{6}$ になる。

中央の数 ${}_{2k}C_k$ は  $1/\sqrt{1-4/10^n}$

の値の中に出現する。

この式は、カタラン数の

母関数(形は  $\sum \frac{{}_{2k}C_k}{k+1} x^{k+1}$ )の

導関数(形は  $\sum {}_{2k}C_k x^k$ )より

導く事が出来る。具体的には母関数  $(1-\sqrt{1-4x})/2$  の導関数  $1/\sqrt{1-4x}$  である。

$$1/\sqrt{1-4/10^3} = 1.0020060200702529274$$

$$1/\sqrt{1-4/10^6} = 1.0000020000060000200000700002520009240034320128700486201847567054$$

$n=2$ の場合は  $1-4/100=24/25=6(2/5)^2$  であるので、 $5/2\sqrt{6}=5\sqrt{6}/12=\sqrt{6}/2.4=1.02062072615965$  となる。

1	→ 2.4倍	2.4
1 2 1		0.048
1 3 3 1		0.00144
1 4 6 4 1		0.0000480
1 5 10 10 5 1		0.000001680
1 6 15 20 15 6 1	↓	0.0000006048
1 7 21 35 35 21 7 1		2.44948974048
1 8 28 56 70 56 28 8 1		$\sqrt{6}=2.44948974278317$
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1		
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1		
1.0206207252 · 2.4 = 2.44948974048		2.44948974048

$\sqrt{2}$ の値も同様である。1.4倍後に

$2^k$ で割り、二桁ずらした数の和が

$\sqrt{2}$ になる。

${}_0C_0$	${}_2C_1$	${}_4C_2$	${}_6C_3$	${}_8C_4$	${}_{10}C_5$	
1	2	6	20	70	252	${}_{2k}C_k$
1.4	28	84	280	980	3528	1.4倍
1	2	4	8	16	32	(最初以外は小数点を省略)
1.4	14	21	35	6125		1/2 <sup>k</sup> 倍
				11025		
1.4	14	21	35	623...		$\sqrt{2}=1.41421356237309$

$\sqrt{5}$ の値も同様である。

$2^{k-1}$ で割り、一桁ずらした数の和が

$\sqrt{5}$ になる。

${}_0C_0$	${}_2C_1$	${}_4C_2$	${}_6C_3$	${}_8C_4$	${}_{10}C_5$	
1	2	6	20	70	252	${}_{2k}C_k$
1/2	1	2	4	8	16	
2	2	3	5	875		1/2 <sup>k-1</sup> 倍 (小数点を省略)
				1575		
2.	2	3	6	0...		$\sqrt{5}=2.23606797749978$

## 平方根の先頭数字と円周率

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$  は円周率に近い値である。先頭三桁数字の和は  $1.41+1.73= 3.14$

$\sqrt{2}= 1.4142\dots$ ,  $\sqrt{3}= 1.7320\dots$ ,  $\sqrt{5}= 2.2360\dots$ ,  $\sqrt{6}= 2.4494\dots$  の先頭二桁数字の最小公倍数/ $10^4$ は  $\text{LCM}(14, 17, 22, 24)/10^4= 3.1416$

$\sqrt{3}\sqrt{6}/\sqrt{2}\sqrt{5}= 1.3416\dots$  先頭二桁数字の交換で  $3.1416\dots$

$\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ の先頭二桁数字の積は  $17 \cdot 22= 374$  であるが、各桁の数字を乗じると  $374 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4= 31416$

## 整数の積和と円周率

整数を1から始めて差1で増減させ、その積を求める。0になると積和の値に影響しないので、1以上の場合だけを考える。分子は積和、分母は積の最後の数字を2乗した積和にする。以下の値は円周率に近づく。

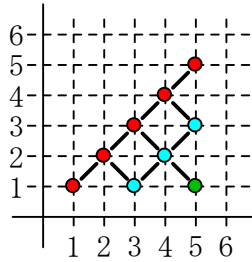
$$4 \cdot \frac{1}{1^2} = 4$$

$$6 \cdot \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2^2} = 3$$

$$8 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1^2} = 3.2$$

$$10 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^2} = 3.125$$

$$12 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1^2} = 3.1475409836$$



先頭の共通な1・2を消去したものが、次の式である。3から始めるものが出て来る。

$$8 \cdot \frac{3+1}{3^2+1^2} = 3.2$$

$$10 \cdot \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2} = 3.125$$

$$12 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1^2} = 3.1475409836$$

より円周率に近い式は

$$6 \cdot \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2^2} \left( 1 + \frac{4}{3^4} - \frac{4}{5^4} + \frac{9}{7^4} \right) = 3.1401934626$$

$$8 \cdot \frac{3+1}{3^2+1^2} \left( 1 - \frac{4}{3^5} - \frac{4}{5^5} - \frac{8}{7^5} \right) = 3.1417059280$$

$$10 \cdot \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2} \left( 1 + \frac{4}{3^6} - \frac{4}{5^6} + \frac{9}{7^6} \right) = 3.1415858349$$

$$12 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot 1^2} \left( 1 - \frac{4}{3^7} - \frac{4}{5^7} - \frac{8}{7^7} \right) = 3.1415924345$$



## 自然対数と平方数

隣り合う自然数の自然対数の差は、 $\ln(k+1)-\ln(k)=\ln((k+1)/k)$  であるが、その-3乗と-5乗の値は平方数と関係が深い。

### -3乗の場合

$$\begin{aligned} 1/3\ln(2/1)^3 &= 1.0009269024 \\ 1^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/3\ln(3/2)^3 &= 5.0005558612 \\ 1^2+2^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/3\ln(4/3)^3 &= 14.0003969454 \\ 1^2+2^2+3^2 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/3\ln(5/4)^3 &= 30.0003087000 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2 &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/3\ln(6/5)^3 &= 55.0002525575 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 &= 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/3\ln(7/6)^3 &= 91.0002136949 \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 &= 91 \end{aligned}$$

### -5乗の場合

$$\begin{aligned} 4/\ln(2/1)^5 &= 24.9995784826 \\ 2^2+1^2 &= 5 \\ 5^2 &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/\ln(3/2)^5 &= 364.9997394364 \\ 3^2+2^2 &= 13 \\ 13^2+14^2 &= 365 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/\ln(4/3)^5 &= 2029.9998124691 \\ 4^2+3^2 &= 25 \\ 25^2+26^2+27^2 &= 2030 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/\ln(5/4)^5 &= 7229.9998536984 \\ 5^2+4^2 &= 41 \\ 41^2+42^2+43^2+44^2 &= 7230 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/\ln(6/5)^5 &= 19854.9998801162 \\ 6^2+5^2 &= 61 \\ 61^2+62^2+63^2+64^2+65^2 &= 19855 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4/\ln(7/6)^5 &= 45954.9998984712 \\ 7^2+6^2 &= 85 \\ 85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2 &= 45955 \end{aligned}$$

2018/08/27 新規  
2018/09/27 追加( $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{3}$ , 円周率等)  
2018/12/05 追加( $\sqrt{6}$ 関連,  $\sqrt{5}$ , 整数に近い数値)

## 数学研究ノート

小規模更新日  
今回 2018/12/11  
前回 2018/12/08