階乗の厳密な式

階乗の厳密な式の導き方を、簡単な例により示す。

3!=1･2･3の場合、$e^{\{\ln 1+\ln 2+\ln 3\}}$ と変形すれば指数部は加算となるが、自然対数の取り扱いが難しい。
それに対してsin関数を経由させた場合は、以下で見る様に取り扱いが簡単になる。
3!=6を例に値を確認しながら、式を変形していく。（確認では本来∞まで計算すべき所を、途中で打ち切っているので、概算値となる。計算結果は指定桁での切り捨て表示をしている。）

$1\cdot 2\cdot 3=6$　の式を変形する。　$\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{2n}=\sqrt{n}$　の公式より

$(2\sin\frac{1\pi}{6})(2\sin\frac{2\pi}{6})=\sqrt{3}$　と　$2\sin\frac{3\pi}{6}=2$　を利用して

$$2\sqrt{3}\quad\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(2\sin\frac{1\pi}{6})(2\sin\frac{2\pi}{6})(2\sin\frac{3\pi}{6})}=5.9999999999$$

$$\frac{2\sqrt{3}\ 6^3}{\pi^3}\frac{\frac{1\pi}{6}\frac{2\pi}{6}\frac{3\pi}{6}}{(2\sin\frac{1\pi}{6})(2\sin\frac{2\pi}{6})(2\sin\frac{3\pi}{6})}=5.9999999999$$

---

sin関数の乗積化式

$$(\sin\frac{k\pi}{2n})/(\frac{k\pi}{2n})=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(2nm)^2-k^2}{(2nm)^2}$$

を使用すると

n=3　k=2　$(\sin\frac{k\pi}{2n})/(\frac{k\pi}{2n})=0.8269933431$

$$\prod_{m=1}^{10^6}\frac{(2nm)^2-k^2}{(2nm)^2}=0.8269934350$$

inf=10^3

$$\frac{2\sqrt{3}\ 3^3}{\pi^3}\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-1^2}\right)\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-2^2}\right)\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-3^2}\right)=5.9976682860$$

$$\frac{2\sqrt{3}\ 3^3}{\pi^3}\exp\left\{\ln\left(\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-1^2}\right)\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-2^2}\right)\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-3^2}\right)\right)\right\}=5.9976682860$$

$\exp\{x\}\equiv e^x$

$$\frac{2\sqrt{3}\ 3^3}{\pi^3}\exp\left\{\sum_{m=1}^{inf}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-1^2}+\sum_{m=1}^{inf}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-2^2}+\sum_{m=1}^{inf}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-3^2}\right\}=5.9976682860$$

自然対数の展開式を縦の列毎に加算すると、ζ(2m)を使用した項になる。

$$\ln\frac{6^2}{6^2-k^2}=\frac{1}{1}\left(\frac{k}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{6}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{6}\right)^6+\cdots$$

$$\ln\frac{12^2}{12^2-k^2}=\frac{1}{1}\left(\frac{k}{12}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{12}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{12}\right)^6+\cdots$$

$$\ln\frac{18^2}{18^2-k^2}=\frac{1}{1}\left(\frac{k}{18}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{18}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{18}\right)^6+\cdots$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$\frac{\zeta(2)k^2}{1\cdot 6^2}+\frac{\zeta(4)k^4}{2\cdot 6^4}+\frac{\zeta(6)k^6}{3\cdot 6^6}+\cdots$$

k=2

$$\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{m}\left(\frac{k}{6}\right)^{2m}=0.1177830356$$

$$\ln\frac{6^2}{6^2-k^2}=0.1177830356$$

$$\sum_{m=1}^{10^4}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-k^2}=0.1899475228$$

$$\sum_{m=1}^{100}\frac{\zeta_(2m)k^{2m}}{m\cdot 6^{2m}}=0.1899586334$$

ζ_(x)はユーザー定義のゼータ関数であり、正の奇数以外の整数点での値を返す。

最終的に積 1·2·3 が和 $1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}$ (m=1..∞)に変換された。

$$1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

$$2\sqrt{3}\left(\frac{3}{\pi}\right)^3 \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2\cdot 3)^{2m}}(1^{2m}+2^{2m}+3^{2m})\right\} = 5.999999999999999999999999999999969260134$$

3をnに一般化すると

n=7 $$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n}k^{2m}\right\} = 5039.999999999999999999999999999974178509$$

$$n! = 2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n}k^{2m}\right\}$$

n=1の場合の式からπの値を求めると

$$1 = 2\sqrt{1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^1 \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2)^{2m}}\cdot 1^{2m}\right\}$$ より

$$\pi = 2\exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m\ 2^{2m}}\right\} = 2\exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\cdot n^{2m}\right\}$$

参考

$$\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 2^{2m}}(2-2^{-2m+1})\right\} = 2$$

$$2\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 2^{2m}}\right\} = 3.14159265358979$$

$$\exp\left\{1-\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 2^{2m}}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right\} = 2$$

$$\exp\left\{1+\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2m+1)2^{2m}}\right\} = 3.14159265358979$$

$$2\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 2^{2m}}(1-3^{-2m})\right\} = 3$$

$\pi/3=6^2/(6^2-1)\cdot 12^2/(12^2-1)\cdot\cdots$ より

$$3\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 6^{2m}}\right\} = 3.14159265358979$$

$$\pi/\sqrt{2} = 2.22144146907918$$

$$2\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 4^{2m}}\right\} = 2.22144146907918$$

$$\sqrt{2\pi} = 2.506628274631$$

$$2\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{2m\ 2^{2m}}\right\} = 2.506628274631$$

$\phi=(\sqrt{5}+1)/2$ $\phi\pi/5 = 1.01664073846305$

$$\exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 10^{2m}}\right\} = 1.01664073846305$$

$\pi^n=2^n\exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\cdot n^{2m+1}\right\}$ を利用して、分母のπを消去すると

n=7 $$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}\right)\right\} = 5040.000000000000000000000000000154928916$$

n=3 $$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}\right)\right\} = 6.000000000000000000000000000000006147973$$

分母がπの一般式と比較すると

$$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n}k^{2m}\right\} = 5.999999999999999999999999999999969260134$$

前二式の相乗平均は

$$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}/2\right)\right\} = 6.000000000000000000000000000000015369932$$

従って階乗の式は

$$n! = 2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n}k^{2m}\right\}$$

$$n! = 2\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}\right)\right\}$$

$$n! = 2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}/2\right)\right\}$$

$\left(2\sin\frac{1\pi}{6}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ だけを利用して、同様の式を導く。

$$\frac{\sqrt{3}\ 6^2}{\pi^2}\frac{\frac{1\pi}{6}\frac{2\pi}{6}}{\left(2\sin\frac{1\pi}{6}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{6}\right)}\cdot 3 = 5.99999999999999$$

$$\frac{\sqrt{3}\ 3^3}{\pi^2}\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-1^2}\right)\left(\prod_{m=1}^{inf}\frac{(6m)^2}{(6m)^2-2^2}\right) = 5.9991671409$$

$$\frac{\sqrt{3}\ 3^3}{\pi^2}\exp\left\{\sum_{m=1}^{inf}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-1^2}+\sum_{m=1}^{inf}\ln\frac{(6m)^2}{(6m)^2-2^2}\right\} = 5.9991671409$$

$$\pi\sqrt{3}\left(\frac{3}{\pi}\right)^3 \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2\cdot 3)^{2m}}\left(1^{2m}+2^{2m}\right)\right\} = 5.99999999999999$$

n!の一般式は　　n=3

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\} = 5.9999999999999999999999999999999999999999999999999997153407611$$

これが以前導いた式である。

$$n! = \pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\}$$

分母のπを消去すると

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}-n^{2m+1}\right)\right\} = 6.0000000000000000000000000000000092219595$$

先頭のπを消去すると、先程の式と同じものになる。

$$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n}k^{2m}\right\} = 5.9999999999999999999999999999999969260134$$

両方のπを消去しても、先程の式と同じものになる。

$$2\sqrt{n}\left(\frac{n}{2}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{2m}-n^{2m+1}\right)\right\} = 6.0000000000000000000000000000000006147973$$

先頭のπを$\sqrt{\pi}$だけ消去すると

$$\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}+n^{2m}/2\right)\right\} = 5.99999999999999999999999999999984630067$$

分母のπを$\sqrt{\pi}$だけ消去すると

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}-n^{2m+1}/2\right)\right\} = 6.00000000000000000000000000000046109797$$

スターリングの公式との比較

ゼータ関数値を使用したスターリングの公式は

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\}$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{3}\frac{\zeta_(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\} = 6.0000014249$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}\right\} = 6.0000014249$$

精度の良い式　$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\}$　と比較する。

両者がほぼ同じ誤差になる項数を調べる。

n=3

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{8}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\} = 5.99999999808777053771552209228785859363 3$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{8}\frac{\zeta_(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\} = 5.99999999530833521336955461712154754229 8$$

n=10

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{38}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\} = 3628799.99999999999999999999896520538717$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{38}\frac{\zeta_(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\} = 3628799.99999999999999999999694807741817$$

n=40　　$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000$

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{166}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\} = 815915283247897734345611269596115894271999999999.9999999999999$$

$$999999999999999999999999999999999999999999999961133972653793$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{166}\frac{\zeta_(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\} = 815915283247897734345611269596115894271999999999.9999999999999$$

$$999999999999999999999999999999999999999999999845992920449527$$

これらの範囲ではn!に対して、4n前後の項数で同程度の誤差となる。項数を更に増加させると
スターリングの公式の方が精度が悪くなる。

n=3

$$\pi\sqrt{n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{20}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}\right\} = 5.99999999999999999999707891818209515119 6$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{-\sum_{m=1}^{20}\frac{\zeta_(-(2m-1))}{(2m-1)n^{2m-1}}\right\} = 5.99998531618326772215627984592964193785 1$$

指数部分の比較をするために、それ以外を同一の形式に変換する。

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\pi}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}+\frac{n^{2m}}{2}\right)\right\}$$ の式に対し

$$\pi=\exp\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2m+1)2^{2m}}\right\}, \quad \pi^n=e^n\exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\cdot\frac{n^{2m+1}}{2m+1}\right\}$$ を適用して、分母をπからeに変更すると

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}-\frac{n^{2m+1}}{2m+1}+\frac{n^{2m}}{2}\right)\right\}$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{50}\frac{\zeta_(2m)}{m(2n)^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^{2m}-\frac{n^{2m+1}}{2m+1}+\frac{n^{2m}}{2}\right)\right\}= 5.999999999999999999999999999999985519927$$

上記式は次の様に変形する事が出来る。

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m\ 2^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{2m}-\frac{n}{2m+1}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

この式とスターリングの公式を、$1/n^9$までの展開式で具体的に比較する。

n=3

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{5}\frac{\zeta_(2m)}{m\ 2^{2m}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{2m}-\frac{n}{2m+1}+\frac{1}{2}\right)\right\}= 5.999911637599280989230388$$

Σk^{2m}にべき乗和の公式を適用して展開すると

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{30n^3}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{42n^5}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{\zeta_(8)}{4\cdot 2^8}\left(\frac{2}{3n}-\frac{7}{15n^3}+\frac{2}{9n^5}-\frac{1}{30n^7}\right)+\frac{\zeta_(10)}{5\cdot 2^{10}}\left(\frac{5}{6n}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{2n^7}+\frac{5}{66n^9}\right)\right\}= 5.999911637599280989230388$$

更に具体的な係数を求めるため、次の関数を定義する。

$$h9(j)=\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{\delta_{j,1}}{6}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{\delta_{j,1}}{3}-\frac{\delta_{j,3}}{30}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{\delta_{j,1}}{2}-\frac{\delta_{j,3}}{6}+\frac{\delta_{j,5}}{42}\right)+$$

$$\frac{\zeta_(8)}{4\cdot 2^8}\left(\frac{2\delta_{j,1}}{3}-\frac{7\delta_{j,3}}{15}+\frac{2\delta_{j,5}}{9}-\frac{\delta_{j,7}}{30}\right)+\frac{\zeta_(10)}{5\cdot 2^{10}}\left(\frac{5\delta_{j,1}}{6}-\frac{\delta_{j,3}}{1}+\frac{\delta_{j,5}}{1}-\frac{\delta_{j,7}}{2}+\frac{5\delta_{j,9}}{66}\right)$$

$1/n$から$1/n^9$までの係数と、その逆数を使用した式は

h9(1)= 0.0832790691	1/h9(1)= 12.0078191291
h9(3)= -0.0026636244	1/h9(3)= -375.4283043201
h9(5)= 0.0005395640	1/h9(5)= 1853.3479202636
h9(7)= -0.0001304381	1/h9(7)= -7666.4666134503
h9(9)= 0.0000148111	1/h9(9)= 67516.8494208573

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{5}\frac{h9(2m-1)}{n^{2m-1}}\right\}= 5.999911637599280989230388$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12.0078191291n}-\frac{1}{375.4283043201n^3}+\frac{1}{1853.3479202636n^5}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7666.4666134503n^7}+\frac{1}{67516.8494208573n^9}\right\}= 5.9999116376$$

単純化するために分母の係数を四捨五入で整数にした式$g_9(n)$と、スターリングの公式$s_9(n)$を比較する。

$$g_9(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{375n^3}+\frac{1}{1853n^5}-\frac{1}{7666n^7}+\frac{1}{67517n^9}\right\}$$

$$s_9(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\frac{1}{1188n^9}\right\}$$

$g_9(3)=$ 6.0000194917
$s_9(3)=$ 6.0000000484

$1/n^9$までの式は、n=3ではスターリングの公式の方が精度が良い。
スターリングの公式はnが小さいと精度が悪くなる。それに対して厳密な式の係数単純化式は、
小さなnに対してもある程度正確な値になる。

$g_9(1)=$ 1.0000292306　　$g_9(1/2)=$ 0.8862822169
$s_9(1)=$ 1.0005343950　　$s_9(1/2)=$ 1.2845629930
$\Gamma(1+1/2)=$ 0.8862269254 $=\sqrt{\pi}/2$

$1/n^7$までの式を同様に求めると

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{30n^3}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{42n^5}\right)+\frac{\zeta_(8)}{4\cdot 2^8}\left(\frac{2}{3n}-\frac{7}{15n^3}+\frac{2}{9n^5}-\frac{1}{30n^7}\right)\right\}=5.9996246863870233825423 24$$

$$h7(j)=\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{\delta_{j,1}}{6}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{\delta_{j,1}}{3}-\frac{\delta_{j,3}}{30}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{\delta_{j,1}}{2}-\frac{\delta_{j,3}}{6}+\frac{\delta_{j,5}}{42}\right)+\frac{\zeta_(8)}{4\cdot 2^8}\left(\frac{2\delta_{j,1}}{3}-\frac{7\delta_{j,3}}{15}+\frac{2\delta_{j,5}}{9}-\frac{\delta_{j,7}}{30}\right)$$

$h7(1)=$ 0.0831161468　　$1/h7(1)=$ 12.031356570621
$h7(3)=$ −0.0024681176　　$1/h7(3)=$ −405.167068266959
$h7(5)=$ 0.0003440573　　$1/h7(5)=$ 2906.49222474074
$h7(7)=$ −0.0000326848　　$1/h7(7)=$ −30595.2522585758

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{4}\frac{h7(2m-1)}{n^{2m-1}}\right\}=5.9996246863870233825423 24$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12.031356570621n}-\frac{1}{405.167068266959n^3}+\frac{1}{2906.49222474074n^5}-\frac{1}{30595.2522585758n^7}\right\}=5.9996246863870246516$$

係数を単純化した式は

$$g_7(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{405n^3}+\frac{1}{2906n^5}-\frac{1}{30595n^7}\right\}$$

$g_7(3)=$ 6.0000588230　　$g_7(1)=$ 1.0001141677　　$g_7(1/2)=$ 0.8865062907

$1/n^5$までの式を同様に求めると

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{30n^3}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{42n^5}\right)\right\}=5.9984138874698323146$$

$$h5(j)=\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{\delta_{j,1}}{6}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{\delta_{j,1}}{3}-\frac{\delta_{j,3}}{30}\right)+\frac{\zeta_(6)}{3\cdot 2^6}\left(\frac{\delta_{j,1}}{2}-\frac{\delta_{j,3}}{6}+\frac{\delta_{j,5}}{42}\right)$$

h5(1)= 0.0824624506　　1/h5(1)= 12.126731519462
h5(3)= -0.0020105303　　1/h5(3)= -497.381205393973
h5(5)= 0.0001261586　　1/h5(5)= 7926.52970402157

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{3}\frac{h5(2m-1)}{n^{2m-1}}\right\}= 5.9984138874698323146$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12.126731519462n}-\frac{1}{497.381205393973n^3}+\frac{1}{7926.52970402157n^5}\right\}= 5.9984138874698324911$$

係数を単純化した式は

$$g_5(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{497n^3}+\frac{1}{7927n^5}\right\}$$

$g_5(3)=$ 6.0001551021　　$g_5(1)=$ 1.0003860197　　$g_5(1/2)=$ 0.8872737461

$1/n^3$までの式を同様に求めると

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{30n^3}\right)\right\}= 5.9933118780643904897$$

$$h3(j)=\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{\delta_{j,1}}{6}\right)+\frac{\zeta_(4)}{2\cdot 2^4}\left(\frac{\delta_{j,1}}{3}-\frac{\delta_{j,3}}{30}\right)$$

h3(1)= 0.0798131198　　1/h3(1)= 12.5292684018137
h3(3)= -0.0011274200　　1/h3(3)= -886.980866804726

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\sum_{m=1}^{2}\frac{h3(2m-1)}{n^{2m-1}}\right\}= 5.9933118780643904897$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{12.5292684018137n}-\frac{1}{886.980866804726n^3}\right\}= 5.9933118780643915855$$

係数を単純化した式は

$$g_3(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{13n}-\frac{1}{887n^3}\right\}$$

$g_3(3)=$ 5.9875410208　　$g_3(1)=$ 0.9947480543　　$g_3(1/2)=$ 0.8786385610

1/nまでの式は $\frac{\zeta_(2)}{1\cdot 2^2}\left(\frac{1}{6}\right)=$ 0.0685389194520094　　1/0.0685389194520094= 14.5902504444966　より

$$g_1(n)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{15n}\right\}$$

$g_1(3)=$ 5.9673549111　　$g_1(1)=$ 0.9857083096　　$g_1(1/2)=$ 0.8685976068

厳密な階乗の式は、項数により指数部の$1/n^{2m-1}$に対する係数が変化するという特徴がある。

2018/08/22　新規
2018/10/25　更新、追加(スターリングの公式との比較)