平方根の計算方法

$\sqrt{a}$の計算式

$\sqrt{a}$は近似値$\sqrt{b}$を使用して、更に正確な値を求める事が出来る。その式は

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{a}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{b}\right)$$

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{\text{近似値}}{2}\left(\frac{\overset{(a)}{\text{元の値}}}{\underset{(a\text{とb}\text{の})}{\text{平均値}}}+\frac{\overset{(a\text{とb}\text{の})}{\text{平均値}}}{\underset{(b)}{\text{近似値}^2}}\right)$$

これと同等な式 $\sqrt{a/b} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{a+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+b}\right)$ は

「立方根等の計算方法」(http://cosmos.art.coocan.jp/sp/sp54.pdf) で求めているが、ここでは別の方法で導く。

三種類の平均(算術・幾何・調和)に関して、次の不等式が成立する。

$$\underset{\text{調和平均}}{\frac{2}{1/a+1/b}} \leqq \underset{\text{幾何平均}}{\sqrt{ab}} \leqq \underset{\text{算術平均}}{\frac{a+b}{2}} \quad (\ 0<a,\ 0<b,\ \text{等号は}\ a=b\ \text{のとき}\ )$$

aとbの値が近い場合、$\sqrt{ab}$の値は 少し小さい $\frac{2}{1/a+1/b}$ と 少し大きい $\frac{a+b}{2}$ に近い。$\sqrt{ab}$との差は

a=3
b=4 の例では

$$\frac{2}{1/a+1/b}-\sqrt{ab}=-0.035530$$

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=0.035898$$

後で説明する 正確な差は ただし $h=\sqrt{ab}-a$

$$\left(\frac{h^2}{a(a+b)}-1\right)\frac{h^2}{2a}=-0.0355301865$$

$$\frac{h^2}{2a}=0.0358983848$$

差の絶対値はほぼ等しい。そのため両式の算術平均は、誤差が打ち消し合って更に値が近い。

$$\sqrt{ab} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1/a+1/b}+\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}\right)$$

$(0.035898-0.035530)/2=0.000184$

上記例では $\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}\right)-\sqrt{ab}=0.000184$

正確な差は $\frac{1}{a+b}\left(\frac{h^2}{2a}\right)^2=0.0001840991$

各辺をbで割った式 $\sqrt{a/b} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}\right)$ より $\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{a}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{b}\right)$

$\sqrt{5}$の近似値を2.2として計算すると、$2.2^2=4.84$ であるので

$$\frac{2.2}{2}\left(\frac{5}{9.84/2}+\frac{9.84/2}{4.84}\right)=1.1\left(\frac{500}{492}+\frac{492}{484}\right)=1.1\left(\frac{125}{123}+\frac{123}{121}\right)=2.2360679970436$$

$$\sqrt{5}=2.23606797749978$$

$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{a}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{b}\right)$ の式は各種の形に変形出来る。変形途中の式は省略する。

（計算は a=5, b=2.2²=4.84 の例）

$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}\right)$	$2.2\left(\frac{5^2+6\cdot 5\cdot 4.84+4.84^2}{4\cdot 5\cdot 4.84+4\cdot 4.84^2}\right)$	$= 2.2\left(\frac{15127}{14883}\right)$	$= 2.2360679970436$
$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{4b}\right)$	$2.2\left(\frac{5}{9.84}+\frac{9.84}{4\cdot 4.84}\right)$	$= 2.2\left(\frac{125}{246}+\frac{123}{242}\right)$	$= 2.2360679970436$
$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1-\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{4b}\right)$	$2.2\left(1-\frac{4.84}{9.84}+\frac{9.84}{4\cdot 4.84}\right)$	$= 2.2\left(1-\frac{121}{246}+\frac{123}{242}\right)$	$= 2.2360679970436$
$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{a-b}{a+b}(1+\frac{a-b}{4b})\right)$	$2.2\left(1+\frac{0.16}{9.84}(1+\frac{0.16}{4\cdot 4.84})\right)$	$= 2.2\left(1+\frac{2}{123}(1+\frac{1}{121})\right)$	$= 2.2360679970436$
$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{a-b}{a+b}+\frac{(a-b)^2}{4b(a+b)}\right)$	$2.2\left(1+\frac{0.16}{9.84}+\frac{0.16^2}{4\cdot 4.84\cdot 9.84}\right)$	$= 2.2\left(1+\frac{2}{123}+\frac{2}{123\cdot 121}\right)$	$= 2.2360679970436$
$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{1}{\frac{4a}{a-b}-2}+\frac{1}{\frac{4a}{a-b}-4}\right)$	$2.2\left(1+\frac{1}{\frac{4\cdot 5}{0.16}-2}+\frac{1}{\frac{4\cdot 5}{0.16}-4}\right)$	$= 2.2\left(1+\frac{1}{123}+\frac{1}{121}\right)$	$= 2.2360679970436$

a と a-b で構成された上記式は単純であり、後で詳しく扱う。

b と a-b で構成された連分数の式は

$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{a-b}{2b+\frac{a-b}{2+\frac{a-b}{2b}}}\right)$	$2.2\left(1+\frac{0.16}{2\cdot 4.84+\frac{0.16}{2+\frac{0.16}{2\cdot 4.84}}}\right)$	$= 2.2\left(\frac{15127}{14883}\right)$	$= 2.2360679970436$

「立方根等の計算方法」で求めた式 $"c_a=\frac{na}{a-b}$ ， $c_b=\frac{nb}{a-b}$ とすれば $\sqrt[n]{a/b} \fallingdotseq 1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_a-k}"$ は、n=2 では

$c_a=\frac{2a}{a-b}$ ， $c_b=\frac{2b}{a-b}$ とすれば $\sqrt{a/b} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_a-1}+\frac{1}{c_a-2}\right)=1+\frac{1}{2c_a-2}+\frac{1}{2c_a-4}$

$c_a-c_b=2$ であるので $2c_a-2=2c_a-(c_a-c_b)=c_a+c_b$ つまり $\sqrt{a/b} \fallingdotseq 1+\frac{1}{c_a+c_b}+\frac{1}{c_a+c_b-2}$

$c=c_a+c_b$ とすれば

$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c-2}\right)$ $\quad c=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$

aとbのみを使用した式は $\frac{1}{c-2}=\frac{1}{2(a+b)/(a-b)-2}=\frac{a-b}{2(a+b)-2(a-b)}=\frac{a-b}{4b}$ であるので

$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a-b}{4b}\right)=\sqrt{b}\,\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}=\frac{a\sqrt{b}}{a+b}+\frac{a+b}{4\sqrt{b}}$ $\quad \sqrt{5}=2.23606797749978$

a=5 ， b=4.84 の場合 $c=2(9.84/0.16)=123$ であり $2.2\left(1+\frac{1}{123}+\frac{1}{121}\right)=2.2360679970436$

($\sqrt{b}=2.2$)

cを使用しない場合の結果は $2.2\left(1+\frac{0.16}{2\cdot 9.84}+\frac{0.16}{4\cdot 4.84}\right)=2.2\left(1+\frac{1}{123}+\frac{1}{121}\right)$

$\frac{5\cdot 2.2}{9.84}+\frac{9.84}{4\cdot 2.2}=2.2360679970436$

ニュートン法との関係

前記式において、近似値からの正確度向上の程度を、ニュートン法と比較する。

関数 $f(x)=x^2-5$ を使用し、$x_0=2.2$ から始めて$\sqrt{5}$の値を求める場合

$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$　　$x_1=2.2363636363636$

$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$　　$x_2=2.2360679970436$

正確度向上は、ニュートン法を二段階適用した場合に相当する。

ニュートン法の適用により、先頭の式を導く。

関数 $f(x)=x^2-a$ を使用し、$\sqrt{b}$ から始める。二項係数 1, 2, 1 と 1, 4, 6, 4, 1 が現れる。

第一段階 ： $\sqrt{b}-f(\sqrt{b})/f'(\sqrt{b})=\dfrac{a+b}{2\sqrt{b}}$

第二段階 ： $\dfrac{a+b}{2\sqrt{b}}-f\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{b}}\right)/f'\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{b}}\right)=\dfrac{a^2+6ab+b^2}{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{b}}$

$g(x)=x-f(x)/f'(x)$ と定義すると

$g(\sqrt{b})=\dfrac{a+b}{2\sqrt{b}}$

$g(g(\sqrt{b}))=\dfrac{a^2+6ab+b^2}{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{b}}$

この式を変形すると、先頭の式になる。

$$\frac{1}{4\sqrt{b}}\left(\frac{4ab+(a+b)^2}{a+b}\right)=\frac{1}{4\sqrt{b}}\left(\frac{4ab}{a+b}+a+b\right)=\frac{b}{4\sqrt{b}}\left(\frac{4a}{a+b}+\frac{a+b}{b}\right)=\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}\right)=\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{a}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{b}\right)$$

更に次の段階に進んだ場合の式を求める。二項係数 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 が現れる。

第三段階 ： $\dfrac{a^2+6ab+b^2}{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{b}}-f\left(\dfrac{a^2+6ab+b^2}{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{b}}\right)/f'\left(\dfrac{a^2+6ab+b^2}{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{b}}\right)=\dfrac{a^4+28a^3b+70a^2b^2+28ab^3+b^4}{8a^3\sqrt{b}+56a^2b\sqrt{b}+56ab^2\sqrt{b}+8b^3\sqrt{b}}$

この式を変形すると

$$\frac{1}{8\sqrt{b}}\cdot\frac{a^4+28a^3b+70a^2b^2+28ab^3+b^4}{a^3+7a^2b+7ab^2+b^3}=\frac{1}{8\sqrt{b}}\cdot\frac{16ab(a+b)^2+(a^2+6ab+b^2)^2}{(a+b)(a^2+6ab+b^2)}=\frac{1}{8\sqrt{b}}\left(\frac{16ab(a+b)}{a^2+6ab+b^2}+\frac{a^2+6ab+b^2}{a+b}\right)$$

$$=\frac{b}{2\sqrt{b}}\left(\frac{4a(a+b)}{4ab+(a+b)^2}+\frac{4ab+(a+b)^2}{4b(a+b)}\right)=\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{2a}{\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{a+b}{2}}+\frac{\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{a+b}{2}}{2b}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{a}{\left(\dfrac{2}{1/a+1/b}+\dfrac{a+b}{2}\right)/2}+\frac{\left(\dfrac{2}{1/a+1/b}+\dfrac{a+b}{2}\right)/2}{b}\right)$$

前段階と基本的な構造(a/平均値と平均値/bの算術平均)は同じであり、変化するのは平均値の部分である。

第二段階 ： aとbの 算術平均

第三段階 ： aとbの「算術平均と調和平均」の算術平均

改めて近似値$\sqrt{b}$から$\sqrt{a}$を求める式を書くと　$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}\ \dfrac{a/\text{平均値}\ +\ \text{平均値}/b}{2}$

目的別の計算式

第三段階の式は、算術平均 $\frac{a+b}{2}(=v)$ だけを含む式に変形出来る。 (*)

$$\frac{a}{\left(\frac{2}{1/a+1/b}+\frac{a+b}{2}\right)/2}+\frac{\left(\frac{2}{1/a+1/b}+\frac{a+b}{2}\right)/2}{b}=\frac{2a}{\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}}+\frac{\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}}{2b}=\frac{2}{\frac{2b}{a+b}+\frac{a+b}{2a}}+\frac{\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}}{2}$$

$$=\frac{2}{\frac{b}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{a}}+\frac{\frac{a}{(a+b)/2}+\frac{(a+b)/2}{b}}{2}=\frac{2}{\frac{b}{v}+\frac{v}{a}}+\frac{\frac{a}{v}+\frac{v}{b}}{2}=\frac{a/v+v/b}{2}+\frac{2}{b/v+v/a}$$

従って$\sqrt{a}$の値は、左右対称な文字の並びを持つ分数と$\sqrt{b}$の積で求める事が出来る。

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}\,\frac{(a/v+v/b)/2\ +\ 2/(b/v+v/a)}{2}\qquad v=\frac{a+b}{2}$$

この式を使用して$\sqrt{2}$の値を求める。a=2, b=1.4^2=1.96 の場合、v=1.98 であり

$$1.4\cdot\frac{(100/99+99/98)/2\ +\ 2/(98/99+99/100)}{2}=1.4142135623730950499$$

$$\sqrt{2}=1.4142135623730950488$$

18桁正しい

分子が1になる様に変形した式は

$$1.4\cdot\frac{(1+1/196+1/198)/1+1/(1-1/198-1/200)}{2}=1.4142135623730950499$$

上記の途中式(*)と同等の式から一般式を導く。

$$\frac{1}{\left(\frac{2b}{a+b}+\frac{a+b}{2a}\right)/2}+\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}\right)/2=\frac{1}{\left(2-\frac{a-b}{a+b}-\frac{a-b}{2a}\right)/2}+\left(2+\frac{a-b}{a+b}+\frac{a-b}{2b}\right)/2=\frac{1}{1-\frac{1}{c}-\frac{a-b}{4a}}+1+\frac{1}{c}+\frac{a-b}{4b}$$

$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{2b}{a-b}$, $\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{2a}{a-b}$ であるため、両辺を2倍すると $c-2=\frac{4b}{a-b}$, $c+2=\frac{4a}{a-b}$ で、求める式は

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\frac{\sqrt{b}}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{c-2}+\frac{1}{c}\right)+1/\left(1-\frac{1}{c}-\frac{1}{c+2}\right)\right\}\qquad c=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$$

正確度は減るが、計算量を減らすために単純な式にする。分母のcとc-2を、その平均のc-1で近似する。

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\left(1+\frac{2}{c-1}\right) \qquad c=2\cdot\frac{a+b}{a-b} \qquad \sqrt{a/b} \fallingdotseq 1+\frac{1}{c}+\frac{1}{c-2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{a/b} \fallingdotseq 1+2\cdot\frac{1+1}{c+c-2}$$

aとbを使用した式。この式は最初に示した式の2個の分数の平均を、分母の和と分子の和の分数で近似した式になっている。

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\,\frac{3a+b}{a+3b} \qquad \sqrt{a/b} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{a+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+b}\right) \quad \rightarrow \quad \sqrt{a/b} \fallingdotseq \frac{a+a+a+b}{a+b+b+b}$$

$\sqrt{5}$で近似値2.2の計算結果は

$$2.2\,\frac{5\cdot 3+4.84}{5+3\cdot 4.84}= 2.2360655$$

上記式の分母と分子には、1, 3, 3, 1の二項係数が交互に出現している。

$\sqrt{5}$の近似値2.2のケースで、二項係数の違いによる誤差の程度を示す。

参考 ： 誤差の絶対値 $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

a=5
b=2.2^2

$$2.2\cdot\frac{1}{1}-\sqrt{5}= -0.036067977499789696 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{10}+1}= 0.036067977499789696$$

$$2.2\,\frac{1a+1b}{2b}-\sqrt{5} = 0.00029565886384666722 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{20}-1}= 0.00029565886384666722$$

$$2.2\,\frac{3a+1b}{1a+3b}-\sqrt{5}= -0.00002403729297893 1304 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{30}+1}= 0.00002403729297893 13$$

$$2.2\,\frac{1a^2+6ab+1b^2}{4ab+4b^2}-\sqrt{5} = 0.000000019543817103295187 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{40}-1}= 0.000000019543817103 29$$

$$2.2\,\frac{5a^2+10ab+1b^2}{1a^2+10ab+5b^2}-\sqrt{5}= -0.000000000158903325199 57686 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{50}+1}= 0.000000000158903325 19$$

$$2.2\,\frac{1a^3+15a^2b+15ab^2+1b^3}{6a^2b+20ab^2+6b^3}-\sqrt{5} = 0.000000000001291982356270300 3 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{60}-1}= 0.000000000001291982 35$$

$$2.2\,\frac{7a^3+35a^2b+21ab^2+1b^3}{1a^3+21a^2b+35ab^2+7b^3}-\sqrt{5}= -0.000000000000010504615978029397 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{\phi^{70}+1}= 0.000000000000010504 61$$

誤差の確認例

$$2.2\,\frac{1a+1b}{2b}-\frac{2\sqrt{5}}{\phi^{20}-1}= \frac{275\sqrt{5}+615}{123\sqrt{5}+275}= \sqrt{5} \qquad 2.2\,\frac{3a+1b}{1a+3b}+\frac{2\sqrt{5}}{\phi^{30}+1}= \frac{1525\sqrt{5}+3410}{682\sqrt{5}+1525}= \sqrt{5}$$

対称性が高い式とその値

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\,\frac{5a^2+10ab+1b^2}{1a^2+10ab+5b^2}$$

$$2.2\,\frac{5a^2+10ab+1b^2}{1a^2+10ab+5b^2} = 2.2360679773408863712095 96$$

$$\sqrt{5}= 2.2360679774997896964091 73$$

$$2.2\,\frac{5a^2+10ab+1b^2}{1a^2+10ab+5b^2}\left(1+\frac{2}{\phi^{10\cdot 5}}\right) = 2.2360679774997896964035 27 \quad (参考)$$

分母と分子が同一係数の式

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \sqrt{b}\,\frac{5(a+b)^2-4b^2}{5(a+b)^2-4a^2}$$

$$1.4\,\frac{5(a+b)^2-4b^2}{5(a+b)^2-4a^2} = 1.4142135623637995128829 63$$

$$\sqrt{2}= 1.4142135623730950488016 88$$

$\sqrt{2}$の近似値1.4のケース
a=2　　b=1.4^2

$$1.4\,\frac{5(a+b)^2-4b^2}{5(a+b)^2-4a^2}\left(1+\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^{6\cdot 5}}\right) = 1.4142135623730950488016 58 \quad (参考)$$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$の展開比で$\sqrt{a}$の値を求める方法

原理をn=3の場合で説明する。近似値$\sqrt{b}$の値は$\sqrt{a}$に十分近く既知とする。

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3=(a+3b)\sqrt{a}-(3a+b)\sqrt{b}$ であり、左辺の値は0に近い。そのため $(a+3b)\sqrt{a}\fallingdotseq(3a+b)\sqrt{b}$ となり

$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}\dfrac{3a+b}{a+3b}$ で求まる。ここで $\sqrt{b}\dfrac{3a+b}{a+3b}-\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^3}{a+3b}=\sqrt{a}$ であるからその誤差は、元の誤差 $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ に比べて十分に小さくする事が出来る。

具体的な計算例

$(\sqrt{5}+2)^3=38+17\sqrt{5}$ → $38/17=2.23529411$　　$(\sqrt{6}+2)^3=44+18\sqrt{6}$ → $44/18=2.44444444$

$(\sqrt{5}+2)^4=161+72\sqrt{5}$ → $161/72=2.23611111$　　$(\sqrt{6}+2)^4=196+80\sqrt{6}$ → $196/80=2.45000000$

$(\sqrt{5}+2)^5=682+305\sqrt{5}$ → $682/305=2.23606557$　　$(\sqrt{6}+2)^5=872+356\sqrt{6}$ → $872/356=2.44943820$

$(\sqrt{10}+3)^3=117+37\sqrt{10}$ → $117/37=3.16216216$　　$(\sqrt{10}+3)^4=721+228\sqrt{10}$ → $721/228=3.16228070$

近似値が非整数の例

$(\sqrt{5}+2.2)^5=858.93632+384.128\sqrt{5}$ → $858.93632/384.128=2.23606797734088$

( )内を4倍して近似値を整数化した例　　$\sqrt{5}=2.23606797749978$

$(4\sqrt{5}+9\ \ )^5=930249+416020\sqrt{5}$ → $930249/416020=2.23606797750108$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ の展開結果を左右対称に使用した2n乗相当の式。

$(\sqrt{5}+2)^3=38+17\sqrt{5}$

$(38/17+5\cdot17/38)/2=2.2360681114$

$\sqrt{5}=2.2360679774$

$(\sqrt{6}+2)^3=44+18\sqrt{6}$

$(44/18+6\cdot18/44)/2=2.4494949494$

$\sqrt{6}=2.4494897427$

$(\sqrt{10}+3)^3=117+37\sqrt{10}$

$(117/37+10\cdot37/117)/2=3.1622776622$

$\sqrt{10}=3.1622776601$

これらの式は更に2乗した展開比を計算する式になっている。　$(\sqrt{10}+3)^6=27379+8658\sqrt{10}$

$(117/37+10\cdot37/117)/2=27379/8658$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ の展開結果と$(b-a)^n$を使用した3n乗相当の式。$(p\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ の場合は$(b-p^2a)^n$を使用する。

$(2\sqrt{2}+3)^3=99+70\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^6$

$4/(1-2)^6=4$

$\dfrac{99}{70}\left(1-\dfrac{2}{99^2/4-1}\right)=1.41421356237314$

$\sqrt{2}=1.41421356237309$

$4/(4-6)^3=-1/2$

$\dfrac{44}{18}\left(1-\dfrac{2}{-44^2/2-1}\right)=2.44948973741543$

$4/(4-6)^4=1/4$

$\dfrac{196}{80}\left(1-\dfrac{2}{196^2/4-1}\right)=2.44948974278871$

$(4\sqrt{3}+7)^3=1351+780\sqrt{3}=(\sqrt{3}+2)^6$

$4/(4-3)^6=4$

$\dfrac{1351}{780}\left(1-\dfrac{2}{1351^2/4-1}\right)=1.732050807568877293536$

$\sqrt{3}=1.732050807568877293527$

$4/(4-6)^5=-1/8$

$\dfrac{872}{356}\left(1-\dfrac{2}{-872^2/8-1}\right)=2.44948974278317239$

$\sqrt{6}=2.44948974278317809$

これらの式は更に3乗した展開比を計算する式になっている。

$(\sqrt{3}+2)^{18}=9863382151+5694626340\sqrt{3}$

$\dfrac{1351}{780}\left(1-\dfrac{2}{1351^2/4-1}\right)=\dfrac{9863382151}{5694626340}$

$(\sqrt{6}+2)^{15}=2652303104+1082798208\sqrt{6}$

$\dfrac{872}{356}\left(1-\dfrac{2}{-872^2/8-1}\right)=\dfrac{2652303104}{1082798208}$

円周率の平方根を二項展開の結果を使用して求める。

$(4\sqrt{\pi}+7)^2=(16\pi+49)+56\sqrt{\pi}$

$\dfrac{2\pi}{7}+\dfrac{7}{2\cdot4}=1.7725979010$

$\left(\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{7}{16}\right)+\dfrac{\pi}{4}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{7}{16}\right)}=1.7724538567$

$\sqrt{\pi}=1.7724538509$

二項展開比と連分数とニュートン法の関係

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ の展開比は平方根の計算式に加え、連分数やニュートン法にも現れる。
今回の調査で明らかになった式を記録しておく。

平方根の計算式

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\,\frac{a+b}{2b}-\sqrt{b}\,\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2b}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\,\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}-\sqrt{b}\,\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^4}{4ab+4b^2}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\,\frac{3a+b}{a+3b}-\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^3}{a+3b}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\,\frac{5a^2+10ab+b^2}{a^2+10ab+5b^2}-\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^5}{a^2+10ab+5b^2}$$

連分数と二項展開比の関係　（連分数では分数線の上側部分を分子、左横と最下部を分母としている）

分子2乗, 分母2個

$$\frac{1}{2b}\left((a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)}\right)=\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}$$

分子2乗, 分母3個

$$\frac{1}{2b}\left((a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)}}\right)=\frac{a^3+15a^2b+15ab^2+b^3}{6a^2b+20ab^2+6b^3}$$

分子2乗, 分母4個

$$\frac{1}{2b}\left((a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)}}}\right)=\frac{a^4+28a^3b+70a^2b^2+28ab^3+b^4}{8a^3b+56a^2b^2+56ab^3+8b^4}$$

分子2乗, 分母5個

$$\frac{1}{2b}\left((a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)}}}}\right)=\frac{a^5+45a^4b+210a^3b^2+210a^2b^3+45ab^4+b^5}{10a^4b+120a^3b^2+252a^2b^3+120ab^4+10b^5}$$

分子3乗, 分母2個

$$\frac{1}{a+3b}\left((3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2b(3a+b)}\right)=\frac{a^3+15a^2b+15ab^2+b^3}{6a^2b+20ab^2+6b^3}$$

分子3乗, 分母3個

$$\frac{1}{a+3b}\left((3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2b(3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2(3a+b)}}\right)=\frac{9a^4+84a^3b+126a^2b^2+36ab^3+b^4}{a^4+36a^3b+126a^2b^2+84ab^3+9b^4}$$

分子3乗, 分母4個

$$\frac{1}{a+3b}\left((3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2b(3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2(3a+b)-\frac{(b-a)^3}{2b(3a+b)}}}\right)=\frac{a^6+66a^5b+495a^4b^2+924a^3b^3+495a^2b^4+66ab^5+b^6}{12a^5b+220a^4b^2+792a^3b^3+792a^2b^4+220ab^5+12b^6}$$

分子4乗, 分母2個

$$\frac{1}{4ab+4b^2}\left((a^2+6ab+b^2)-\frac{(b-a)^4}{2(a^2+6ab+b^2)}\right)=\frac{a^4+28a^3b+70a^2b^2+28ab^3+b^4}{8a^3b+56a^2b^2+56ab^3+8b^4}$$

分子5乗, 分母2個

$$\frac{1}{a^2+10ab+5b^2}\left((5a^2+10ab+b^2)-\frac{(b-a)^5}{2b(5a^2+10ab+b^2)}\right)=\frac{a^5+45a^4b+210a^3b^2+210a^2b^3+45ab^4+b^5}{10a^4b+120a^3b^2+252a^2b^3+120ab^4+10b^5}$$

連分数の通常の変形では気付かない恒等式を発見出来る。分子m乗, 分母n個と分子n乗, 分母m個は等しい。

二項展開比の関係

$$\frac{1}{2b}\left(a\ \frac{1}{1}+b\ \frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{2b} \qquad \frac{1}{2b}\left(a\ \frac{a+3b}{3a+b}+b\ \frac{3a+b}{a+3b}\right)=\frac{a^3+15a^2b+15ab^2+b^3}{6a^2b+20ab^2+6b^3}$$

$$\frac{1}{2b}\left(a\frac{2b}{a+b}+b\frac{a+b}{2b}\right)=\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2} \qquad \frac{1}{2b}\left(a\frac{4ab+4b^2}{a^2+6ab+b^2}+b\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}\right)=\frac{a^4+28a^3b+70a^2b^2+28ab^3+b^4}{8a^3b+56a^2b^2+56ab^3+8b^4}$$

平方根の計算式における三者の関係を例示する。

二項展開比　$\sqrt{a}=\sqrt{b}\ \frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2}-\sqrt{b}\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^4}{4ab+4b^2}$　第二項は誤差

連分数　$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2b}\left((a+b)-\frac{(b-a)^2}{2(a+b)}\right)-\sqrt{b}\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^4}{4ab+4b^2}$　分母の個数を増やすと低い二項係数で表現出来る

ニュートン法　$\sqrt{a}=g(g(\sqrt{b}))-\sqrt{b}\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^4}{4ab+4b^2}$　二段階適用
$f(x)=x^2-a$　$g(x)=x-f(x)/f'(x)$

二項展開と計算結果の比較　　a=3

二項展開　$(2+\sqrt{3})^4=(7+4\sqrt{3})^2=97+56\sqrt{3}$　　$(2+\sqrt{3})^8=18817+10864\sqrt{3}$

二項展開比　97/56 = 1.732142857　　18817/10864= 1.732050810

連分数　(7-1/14)/4= 1.732142857　　(7-1/(14-1/((14-1/(14)))))/4= 1.732050810

ニュートン法　g(g(2)) = 1.732142857　　g(g(g(2))) = 1.732050810

余談 ： 二項展開はニュートンと関係が深い。ニュートンの一般二項定理で、n乗を非整数に一般化した。

二項係数を明示した平方根の近似式は

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{m}{}_{2m+1}C_{2k}\ a^kb^{m-k}}{\sum_{k=0}^{m}{}_{2m+1}C_{2k+1}a^kb^{m-k}}$$　あるいは　$$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{m}{}_{2m+1}C_{2k}\ (a/b)^k}{\sum_{k=0}^{m}{}_{2m+1}C_{2k+1}(a/b)^k}$$

a=5,　$b=2^2$,　m=3　の例では

$$2\cdot\frac{\sum_{k=0}^{3}{}_{7}C_{2k}\ 5^k4^{3-k}}{\sum_{k=0}^{3}{}_{7}C_{2k+1}5^k4^{3-k}}=2.236067970034$$

$\sqrt{5}$= 2.236067977499

$$2\cdot\frac{\sum_{k=0}^{3}{}_{7}C_{2k}\ (5/4)^k}{\sum_{k=0}^{3}{}_{7}C_{2k+1}(5/4)^k}=2.236067970034$$

連分数と二項展開を使用した平方根の計算方法

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ の二項展開を使用して平方根を計算する連分数を導く。

n=1の場合の連分数は簡単である。$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ の両辺に$2\sqrt{b}$を加えると $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

分母の$\sqrt{a}+\sqrt{b}$にこれを代入し続けると $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{:\ :\ \dfrac{a-b}{2\sqrt{b}+\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}}}$

右辺の$\sqrt{a}$を$\sqrt{b}$で近似して$\sqrt{b}$を引くと、同一分子の連分数になる。

$2\sqrt{b}$を1/2倍すると右上と右横の分子両方が1/2倍されるので、分子を1/4倍した同一分母の連分数に変形できる。

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}+\cfrac{a-b}{2\sqrt{b}+\cfrac{a-b}{:\ :\ \cfrac{a-b}{2\sqrt{b}+\cfrac{a-b}{2\sqrt{b}}}}}$$

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\sqrt{b}+\cfrac{2(a-b)/4}{\sqrt{b}+\cfrac{(a-b)/4}{:\ :\ \cfrac{(a-b)/4}{\sqrt{b}+\cfrac{(a-b)/4}{\sqrt{b}}}}}$$

---

n乗の場合も同様である。$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n=p\sqrt{a}+q\sqrt{b}$ とすると $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^n=(-1)^n(q\sqrt{b}-p\sqrt{a})$ であるので

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^n=\dfrac{(a-b)^n}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n}$ の $(-1)^n(q\sqrt{b}-p\sqrt{a})=\dfrac{(a-b)^n}{p\sqrt{a}+q\sqrt{b}}$ より $p\sqrt{a}-q\sqrt{b}=\dfrac{-(b-a)^n}{p\sqrt{a}+q\sqrt{b}}$

両辺に$2q\sqrt{b}$を加えると $p\sqrt{a}+q\sqrt{b}=2q\sqrt{b}-\dfrac{(b-a)^n}{p\sqrt{a}+q\sqrt{b}}$

分母の$p\sqrt{a}+q\sqrt{b}$にこれを代入すると $p\sqrt{a}+q\sqrt{b}=2q\sqrt{b}-\dfrac{(b-a)^n}{2q\sqrt{b}-\dfrac{(b-a)^n}{p\sqrt{a}+q\sqrt{b}}}$ となる。

n=1の場合の式と比較すると、$\sqrt{a}$と$\sqrt{b}$が$p\sqrt{a}$と$q\sqrt{b}$に変化している。そのため求める連分数は

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\frac{1}{p}\left(q\sqrt{b}-\cfrac{(b-a)^n}{2q\sqrt{b}-\cfrac{(b-a)^n}{:\ :\ \cfrac{(b-a)^n}{2q\sqrt{b}-\cfrac{(b-a)^n}{2q\sqrt{b}}}}}\right)$$

$$\sqrt{a}\fallingdotseq\frac{1}{p}\left(q\sqrt{b}-\cfrac{2(b-a)^n/4}{q\sqrt{b}-\cfrac{(b-a)^n/4}{:\ :\ \cfrac{(b-a)^n/4}{q\sqrt{b}-\cfrac{(b-a)^n/4}{q\sqrt{b}}}}}\right)$$

具体的な計算方法を$\sqrt{3}$等を例に説明する。

近い整数として2を選び、近似値を前に置いた「和」と「平方数の差」のn乗(例えば6乗)を計算する。

$(2+\sqrt{3})^6=1351+780\sqrt{3}$

$(4-3)^6=1=s$

二段階の計算例

$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}$

$(7+4\sqrt{3})^3=1351+780\sqrt{3}$

$(26+15\sqrt{3})^2=1351+780\sqrt{3}$

分子がsである以下の連分数により値を求める。 (同一分子の連分数)

分母が3個の場合

$$\frac{1}{780}\left(1351-\cfrac{1}{2702-\cfrac{1}{2702}}\right)$$

$=1.732050807568877293527446341505872$

$$=\frac{1351}{780}\left(1-\cfrac{2}{1351^2 4-1}\right)$$

分母が5個の場合

$$\frac{1}{780}\left(1351-\cfrac{1}{2702-\cfrac{1}{2702-\cfrac{1}{2702-\cfrac{1}{2702}}}}\right)$$

$=1.732050807568877293527446341505872\mathbf{53}$

$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505872\mathbf{36}$

分母が3個の連分数は、
更に3乗した展開比に
よる計算に相当する。

$(2+\sqrt{3})^{18}= 9863382151+5694626340\sqrt{3}$

$\frac{9863382151}{5694626340}= 1.732050807568877293 5363$

分母がm個の連分数は、
nm乗した展開比に
よる計算に相当する。

$(2+\sqrt{3})^{30}= 72010600134783751+41575339372323900\sqrt{3}$

$\frac{72010600134783751}{41575339372323900}= 1.732050807568877293527446341505872 53$

---

n=1で近似値が2の場合

$(2+\sqrt{3})= 2+\sqrt{3}$
$(4- 3)= 1= s$

$\frac{1}{1}\left(2-\frac{1}{4-\frac{1}{4-\frac{1}{4-\frac{1}{4}}}}\right)= 1.7320574162 = 2-\frac{1}{4-\frac{1}{4-\frac{1}{4-\frac{1}{4}}}}$

すぐ下の連分数で分母を
10個にした場合に相当
する計算効率がある

n=1で近似値が1の場合

$(1+\sqrt{3})= 1+\sqrt{3}$
$(1- 3)= -2= s$

$\frac{1}{1}\left(1+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}}}\right)= 1.7272727272 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

結果は$\sqrt{3}$の代表的な
(正則)連分数であるが
近似値が少し離れた1
なので計算効率が悪い

n=1で$11\sqrt{3}$の近似値19を使用する場合

$(19+11\sqrt{3})= 19+11\sqrt{3}$
$(361-363) = -2 = s$

$\frac{1}{11}\left(19+\frac{2}{38+\frac{2}{38+\frac{2}{38+\frac{2}{38}}}}\right)= 1.732050807568859 = \frac{1}{11}\left(19+\frac{1}{19+\frac{1}{38+\frac{1}{19+\frac{1}{38}}}}\right)$

参考
$(2+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})= 19+11\sqrt{3}$

一つ前の連分数と比較すると、分母を19倍して全体を11で割ったものになっている。

---

n=1で近似値を連続使用する連分数　　(同一分母の連分数)

$\sqrt{5}$:　$(2.2^2-5)/4= -0.04$

$2.2+\frac{2\cdot 0.04}{2.2+\frac{0.04}{2.2+\frac{0.04}{2.2}}}$

$= 2.2360679970436$

$(22^2-10^25)/4= -4$

$\frac{1}{10}\left(22+\frac{2\cdot 4}{22+\frac{4}{22+\frac{4}{22}}}\right)$

$= 2.2360679970436$
$\sqrt{5}= 2.2360679774997$

$\frac{1}{5}\left(11+\frac{2}{11+\frac{1}{11+\frac{1}{11}}}\right)$

$= 2.2360679970436$

$\sqrt{3}$:　$(1.732^2-3)/4= -0.000044$

$1.732+\frac{2\cdot 0.000044}{1.732+\frac{0.000044}{1.732+\frac{0.000044}{1.732}}}$

$= 1.7320508075688772936$

$(1732^2-1000^23)/4= -44$

$\frac{1}{1000}\left(1732+\frac{2\cdot 44}{1732+\frac{44}{1732+\frac{44}{1732}}}\right)$

$= 1.7320508075688772936$
$\sqrt{3}= 1.7320508075688772935$

連分数を使用した平方根の計算方法

$\sqrt{a}$の連分数の一例

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\left(1+\cfrac{2}{-1+c-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{c-\cdots}}}}\right)\qquad c=2\cdot\frac{a+b}{a-b}$$

あるいは

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\left(1+\cfrac{2(a-b)}{a+3b-\cfrac{(a-b)^2}{2(a+b)-\cfrac{(a-b)^2}{2(a+b)-\cfrac{(a-b)^2}{2(a+b)-\cdots}}}}\right)$$

平方数r^2の近辺の場合は $a=r^2+s$, $b=r^2$, $a-b=s$, $a+b=2r^2+s$ として

$$\sqrt{r^2+s}=r\left(1+\cfrac{2s}{4r^2+s-\cfrac{s^2}{4r^2+2s-\cfrac{s^2}{4r^2+2s-\cfrac{s^2}{4r^2+2s-\cdots}}}}\right)$$

$2^2\pm1$ の平方根

$\sqrt{5}$: $2\left(1+\cfrac{2}{17-\cfrac{1}{18-\cfrac{1}{18-\cfrac{1}{18}}}}\right)=2.2360679774766$　　$\sqrt{5}=2.2360679774997$

$\sqrt{3}$: $2\left(1-\cfrac{2}{15-\cfrac{1}{14-\cfrac{1}{14-\cfrac{1}{14}}}}\right)=1.7320508077444$　　$\sqrt{3}=1.7320508075688$

$3^2\pm1$ の平方根

$\sqrt{10}$: $3\left(1+\cfrac{2}{37-\cfrac{1}{38-\cfrac{1}{38-\cfrac{1}{38}}}}\right)=3.1622776601683408$　　$\sqrt{10}=3.1622776601683793$

$\sqrt{8}$: $3\left(1-\cfrac{2}{35-\cfrac{1}{34-\cfrac{1}{34-\cfrac{1}{34}}}}\right)=2.82842712474628$　　$\sqrt{8}=2.82842712474619$

$2\sqrt{2}$:

2^2+2 の平方根

$\sqrt{6}$: $2\left(1+\cfrac{4}{18-\cfrac{4}{20-\cfrac{4}{20-\cfrac{4}{20}}}}\right)=2\left(1+\cfrac{2}{9-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{10}}}}\right)=2.44948973741543$　　$\sqrt{6}=2.44948974278317$

3^2-2 の平方根

$\sqrt{7}$: $3\left(1-\cfrac{4}{34-\cfrac{4}{32-\cfrac{4}{32-\cfrac{4}{32}}}}\right)=3\left(1-\cfrac{2}{17-\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{16}}}}\right)=2.64575131114436$　　$\sqrt{7}=2.64575131106459$

2の平方根　$2=(7^2+1)/5^2$ を利用

$$1.4\left(1+\cfrac{2}{14^2+1-\cfrac{1}{14^2+2-\cfrac{1}{14^2+2}}}\right)=1.41421356237309481\qquad\sqrt{2}=1.41421356237309504$$

項数は多いが単純な規則性を持つ平方根の連分数

$\sqrt{r^2+s}$ は次の規則的な連分数に等しい。右はその理由を示す式。

$$\sqrt{r^2+s}= r+\cfrac{s}{2r+\cfrac{s}{2r+\cfrac{s}{2r+\cfrac{s}{2r+\cdots}}}}$$

$\sqrt{r^2+s} - r= \dfrac{s}{\sqrt{r^2+s}+r}$ の両辺に2rを加えると

$$\sqrt{r^2+s}+r= 2r+\frac{s}{\sqrt{r^2+s}+r}= 2r+\cfrac{s}{2r+\cfrac{s}{\sqrt{r^2+s}+r}}$$

$2^2\pm1$ の平方根

$\sqrt{5}$: $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}}}}}}$

$= 2.2360679774766$

$\sqrt{3}$: $2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\frac{1}{4}}}}}}}}$

$= 1.7320508077444$

2^2+2 の平方根

$\sqrt{6}$: $2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\frac{2}{4}}}}}}}}$

$= 2.44948973741543$

3^2-2 の平方根

$\sqrt{7}$: $3-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\cfrac{2}{6-\frac{2}{6}}}}}}}}$

$= 2.64575131114436$

$3^2\pm1$ の平方根

$\sqrt{10}$: $3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\frac{1}{6}}}}}}}}$

$= 3.1622776601683408$

$\sqrt{8}$: $3-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}}}}}}$

$2\sqrt{2}$:

$= 2.82842712474628$

$= 1.41421356237314\cdot 2$

連分数を簡単にした式 $\sqrt{r^2+s} \fallingdotseq r+\dfrac{s}{2r+s/2r}$

$10= 3^2+1$

$3+\dfrac{1}{6+1/6}= 3.16216216$

$2= 1.4^2+0.04$

$1.4+\dfrac{0.04}{2.8+0.04/2.8}= 1.41421319$

$98= 10^2-2$

$10+\dfrac{-2}{20-2/20}$

$\sqrt{98}= 7\sqrt{2}$

$= 9.89949493$

$= 9.89949748$

$= 1.41421392\cdot 7$

ある桁までの確定数値を求める方法

h_1とh_2を0に近い正の数とし、$\sqrt{a-h_1}$と$\sqrt{a+h_2}$の正確な値を簡単な計算で求める方法により実現する。

$\sqrt{2}$を例にして説明する。

$2\cdot 10^2 14^2 = 200\cdot 196 = 198^2-2^2$ より $2=\dfrac{198^2-2^2}{140^2}=\left(\dfrac{198}{140}\right)^2-\left(\dfrac{2}{140}\right)^2=\left(\dfrac{99}{70}\right)^2-\left(\dfrac{1}{70}\right)^2$

$\sqrt{2+1/70^2}= 99/70$ が成り立ち、$\sqrt{2}$よりも大きい。2をこの数値で割ったものは、$\sqrt{2}$よりも小さい。

$\dfrac{2}{99/70}=\dfrac{140}{99}$ ここで $(140/99)^2-2= -2/99^2$ のため $\sqrt{2-2/99^2}=140/99$ が成り立つ。従って

$\sqrt{2-2/99^2}=140/99= 1.4141414141 < \sqrt{2} <\sqrt{2+1/70^2}= 99/70= 1.4142857142$ 先頭4桁が確定する。

より長い桁を確定させるため、198^2-2^2 に対しても上記と同様な方法を適用する。

$(198^2-2^2)198^2=(198^2-2)^2-2^2$ より $2=\dfrac{(198^2-2)^2-2^2}{140^2 198^2}=\left(\dfrac{198^2-2}{140\cdot 198}\right)^2-\left(\dfrac{2}{140\cdot 198}\right)^2=\left(\dfrac{19601}{13860}\right)^2-\left(\dfrac{1}{13860}\right)^2$

$\sqrt{2+1/13860^2}= 19601/13860$ が成り立つ。

$\dfrac{2}{19601/13860}=\dfrac{27720}{19601}$ ここで $(27720/19601)^2-2= -2/19601^2$ のため $\sqrt{2-2/19601^2}= 27720/19601$

$\sqrt{2-2/19601^2}= 27720/19601= 1.4142135605326 2 < \sqrt{2} <\sqrt{2+1/13860^2}= 19601/13860= 1.4142135642135 6$

先頭9桁が確定する。

左側の値は $\sqrt{2-1/13860^2+1/(13860\cdot 19601)^2}$ に等しく、$\sqrt{2}$は両側のほぼ中間に位置する。

正確な位置は次頁で示している。

最初の値 99/70 と 140/99 の平均は

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{99}{70}+\dfrac{140}{99}\right)=\dfrac{19601}{13860}$ であり、二番目の値に等しい。

$\sqrt{2}$との差は

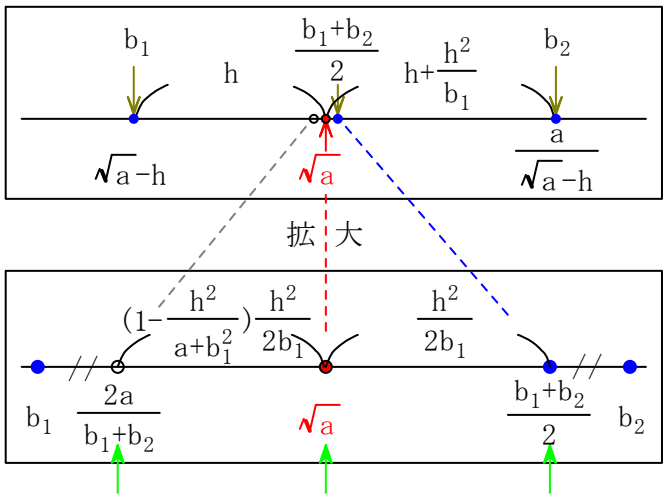
$(\sqrt{2}-1)^6 = 99-70\sqrt{2}$ より $\dfrac{99}{70}-\sqrt{2}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^6}{70}$

$(\sqrt{2}-1)^{12}= 19601-13860\sqrt{2}$ より $\dfrac{19601}{13860}-\sqrt{2}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^{12}}{13860}$

$(198^2-2)^2-2^2$ 以降に対して同様な方法を繰り返し適用すれば、どこまでも正確な値を求める事が出来る。

積がaに等しい正の二変数の平均値と$\sqrt{a}$の位置関係

$a=b_1b_2$ で $b_1=\sqrt{a}-h$ (hは正の微小量)として、$\sqrt{a}$やb_1とb_2とその平均値の位置関係を示す。



$$b_2-\sqrt{a}=\frac{a}{\sqrt{a}-h}-\sqrt{a}=\frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{a}-h}=h\left(\frac{1}{1-h/\sqrt{a}}\right)=h+\frac{h^2}{\sqrt{a}}+\frac{h^3}{a}+\cdots$$

$$b_2-\sqrt{a}=\frac{a}{\sqrt{a}-h}-\sqrt{a}=\frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{a}-h}=h+\frac{h^2}{\sqrt{a}-h}=h+\frac{h^2}{b_1}$$

次式の様に$\sqrt{a}$は$(b_1+b_2)/2$より少し小さい値である。

$$\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{h^2}{2b_1}=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{(\sqrt{a}-b_1)^2}{2b_1}=\frac{(b_1b_2-a)+2b_1\sqrt{a}}{2b_1}=\sqrt{a}$$

左図にはaを$(b_1+b_2)/2$で割った値$2a/(b_1+b_2)$も示す。

これは $2b_1b_2/(b_1+b_2)=2/(1/b_1+1/b_2)$ で調和平均である。

「調和平均」と「幾何平均」と「算術平均」の不等式を図示している。$\sqrt{a}$と調和平均の距離は

$$\sqrt{a}-\frac{2a}{b_1+b_2}=\frac{2\sqrt{a}\,((b_1+b_2)/2-\sqrt{a})}{b_1+b_2}=\frac{2\sqrt{a}}{b_1+b_2}\frac{h^2}{2b_1}=\left(\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{h^2}{2b_1}\right)\frac{2}{b_1+b_2}\frac{h^2}{2b_1}=\left(1-\frac{h^2}{a+b_1^2}\right)\frac{h^2}{2b_1}$$

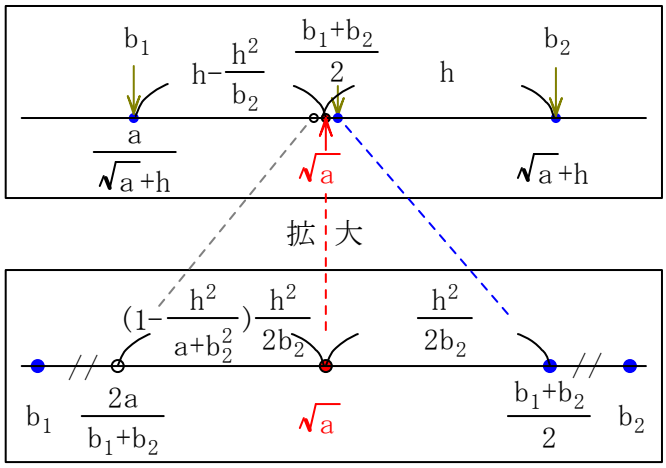
これら三種類の平均を、等式として表現すると

$$\frac{2a}{b_1+b_2}+\left(1-\frac{h^2}{a+b_1^2}\right)\frac{h^2}{2b_1}=\sqrt{a}=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{h^2}{2b_1}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b_1b_2}$$

$$h=\sqrt{b_1b_2}-b_1$$

この位置関係により、算術平均と調和平均の繰り返しで$\sqrt{a}$を求める事が出来る。



$b_2=\sqrt{a}+h$ とした場合も、同様な式になる。

本来は以前の式は $b_1=\sqrt{a}-h_1$ 今回は $b_2=\sqrt{a}+h_2$ と区別するべきであるが、同じhで表現している。

$$\sqrt{a}-b_1=h-\frac{h^2}{b_2}=h-\frac{h^2}{\sqrt{a}}+\frac{h^3}{a}-\cdots$$

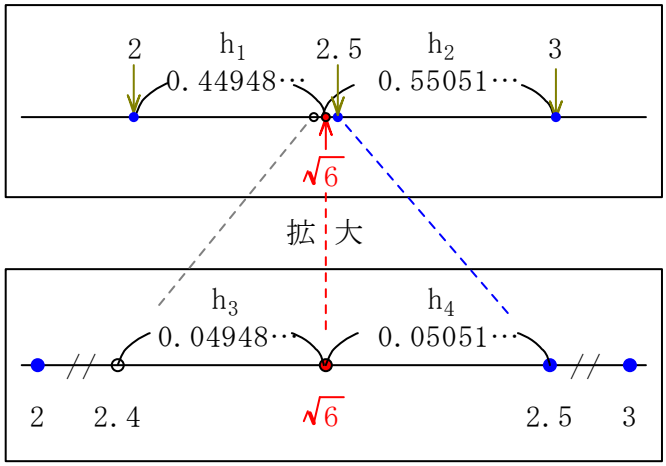
$$\frac{2a}{b_1+b_2}+\left(1-\frac{h^2}{a+b_2^2}\right)\frac{h^2}{2b_2}=\sqrt{a}=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{h^2}{2b_2}$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b_1b_2}$$

$$h=b_2-\sqrt{b_1b_2}$$

(途中式は省略)

実例　　$6=2\cdot 3=(2.4)(2.5)$



$(2+3)/2=2.5$　　$6/2.5=2.4$

$h_1=\sqrt{6}-2=0.44948\cdots$　　$h_3=\sqrt{6}-2.4=0.04948\cdots$

$h_2=3-\sqrt{6}=0.55051\cdots$　　$h_4=2.5-\sqrt{6}=0.05051\cdots$

$h_2-h_1=5-2\sqrt{6}=0.1010205144336438$

$h_4-h_3=4.9-2\sqrt{6}=0.0010205144336438$

(1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, …はカタラン数)

$h_1/h_2=\sqrt{2}/\sqrt{3}=0.81649$　　$h_3/h_4=\sqrt{2.4}/\sqrt{2.5}=0.97979$

$h_3/h_1=0.110102051443364$　　$\frac{h_3h_4}{h_1h_2}=0.01010205144336438$

$h_4/h_2=0.091751709536136$

5= 2·2.5 を利用して$\sqrt{5}$を求める例　　2+2.5= 4.5　　$\sqrt{5}$= 2.2360679774

単純に平均値を計算すると　4.5/2= 2.25

(算術平均+調和平均)/2 で　(4.5/2+2·5/4.5)/2= 2.2361111

(算術平均+調和平均)/2は $\frac{b_1+b_2}{4}+\frac{a}{b_1+b_2}$ であるが、正確な式は $\sqrt{a}=\frac{b_1+b_2}{4}+\frac{a}{b_1+b_2}-\frac{(b_1+b_2-2\sqrt{a})^2}{4(b_1+b_2)}$

三項目の分子は$\sqrt{a}$をb_1+hに、あるいはb_2-hに置き換えると$(b_2-b_1-2h)^2$となる。

b_2-b_1-2hを$\pm h^2/\sqrt{a}$で近似させると $\sqrt{a}\fallingdotseq(\frac{b_1+b_2}{4}+\frac{a}{b_1+b_2})-\frac{h^4}{4a(b_1+b_2)}$　　$h\fallingdotseq\frac{b_2-b_1}{2}$

$\frac{4.5}{4}+\frac{5}{4.5}-\frac{0.25^4}{4\cdot 5\cdot 4.5}$= 2.2360677083

調和平均を使用しない近似式は $\sqrt{a}\fallingdotseq\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{h^2}{b_1+b_2}$　　$h\fallingdotseq\frac{b_2-b_1}{2}$　　$\frac{4.5}{2}-\frac{0.25^2}{4.5}$= 2.2361111

2= $\frac{99}{70}\frac{140}{99}$ を利用して$\sqrt{2}$を求める例　　$\frac{1}{2}(\frac{99}{70}+\frac{140}{99})=\frac{19601}{13860}$　　$\frac{1}{2}(\frac{99}{70}-\frac{140}{99})=\frac{1}{13860}$

h^2の式　$\frac{19601}{13860}-\frac{1}{19601(2\cdot 13860)}$ = 1.4142135623730950499

$\sqrt{2}$= 1.4142135623730950488016887242

h^4の式　$\frac{19601}{2\cdot 13860}+\frac{13860}{19601}-\frac{1}{2\cdot 19601(2\cdot 13860)^3}$ = 1.4142135623730950488016887226

$a/b_1=b_2$ の割り算で$\sqrt{a}$の近似値の桁数を増加させる方法

$\sqrt{2}$の例

	1.4　(初期値)	利用する式
2/1.4= 1.428 57…	28/2= 14	
2/1.414= 1.414427157… (6−5= 1)	4271/2= 2135.5	$0<b_1<b_2$ ， $a/b_1=b_2 \rightarrow b_1<\sqrt{a}<b_2$
2/1.4142135= 1.41421362474619 28…	124746192/2= 62373096	$a/b_1=b_1+d \rightarrow (b_1+b_1+d)/2=b_1+d/2$
1.4142135 62373096	$\sqrt{2}$= 1.41421356237309504 88016	

次回は $b_1>b_2$ となる。2/1.414213562373096= 1.414213562373094… 続ける場合は$\sqrt{7}$の例を参照。

参考: +d/2では過剰な値になる事がある。$\sqrt{a}=b_1+d/2-(\sqrt{b_1(b_1+d)}-b_1)^2/2b_1$ であるので、

$\sqrt{b_1(b_1+d)}-b_1=b_1\sqrt{1+d/b_1}-b_1\fallingdotseq d/2$ を使用して $\sqrt{a}\fallingdotseq b_1+(d-d^2/4b_1)/2$ がより正確な式である。

2/1.4142135= 1.41421362474619 2848533…　$1.24746^2/0.4\cdot 1.41421$= 2.750928

(仮想小数点.の関係で0.4で割る)　(124746192.848533　−2.750928)/2= 62373095.0488025

$\sqrt{3}$の例

	1.7	
3/1.7= 1.76470…	64/2= 32	右辺の整数部分の桁数が
3/1.732= 1.732101616…	1016/2= 0508	倍増する様に先頭0を置く
3/1.7320508= 1.7320508151377546…	15137754/2= 07568877	
1.732050807568877	$\sqrt{3}$= 1.732050807568877 29352 74	

$\sqrt{7}$の例

	2.6	$b_1>b_2$ となる場合は、少し前の
7/2.6= 2.69230… (6−5= 1)	92/2= 46	桁からの平均値を求める
7/2.646= 2.645502645…	15026/2= 7513	(46+45.5026)/2
7/2.6457513= 2.64575132212918122…	22129181/2= 11064590.5	=(45+45+1.5026)/2= 45.7513
2.645751311064590	$\sqrt{7}$= 2.645751311064590 5905016	

単純な分数式により平方根の値を求める方法

$a=r^2+s$ の形式にして $d=4r^2/s$ を求め、$\sqrt{a}\fallingdotseq r\left(1+\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}\right)$ を計算する。$4a/s=d+4$ が利用出来る。

$10=3^2+1$　　$\sqrt{10}=3.162277660168$

$4\cdot 10/1=40$　　$3\left(1+\frac{1}{36}+\frac{1}{38}\right)=3.162280701754$

$2=1.4^2+0.04$　　$\sqrt{2}=1.414213562373$

$4\cdot 2/0.04=200$　　$1.4\left(1+\frac{1}{196}+\frac{1}{198}\right)=1.414213564213$

$98=10^2-2$　　$\sqrt{98}=7\sqrt{2}=9.899494936611$

$4\cdot 98/(-2)=-196$　　$10\left(1-\frac{1}{200}-\frac{1}{198}\right)=9.899494949494$

$=1.414213564213\cdot 7$

整数の平方根$\sqrt{n}$を分数式で表す。以下は4～5桁正しい。

$\sqrt{3}$：　$2\left(1-\frac{1}{16}-\frac{1}{14}\right)=1.73214$

$\sqrt{8}$：　$3\left(1-\frac{1}{36}-\frac{1}{34}\right)=2.82843$

$2\sqrt{2}$：

$\sqrt{7}$：　$3\left(1-\frac{1}{18}-\frac{1}{16}\right)=2.64583$

$\sqrt{5}$：　$2\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}\right)=2.23611$

$\sqrt{10}$：　$3\left(1+\frac{1}{36}+\frac{1}{38}\right)=3.16228$

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$：　$4-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=3.96825$

近似式の根拠となる等式は

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(x^2+4x+2)^2}}$$　あるいは　$$\sqrt{1-\frac{4}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(x^2-4x+2)^2}}$$

これを利用して $\sqrt{a}=\sqrt{r^2+s}=r\sqrt{1+s/r^2}=r\sqrt{1+4/(4r^2/s)}=r\sqrt{1+4/d}\fallingdotseq r(1+1/d+1/(d+2))$

右辺の$\sqrt{1-4/(\cdots)^2}$ は1より小さいため、近似値$r(1+1/d+1/(d+2))$は$\sqrt{a}$より少し大きな値となる。

’a/近似値 ＜ $\sqrt{a}$ ＜ 近似値 ’ により、ある桁までを確定出来るのは前記と同様である。

更に正確な値が計算出来る式を考える。$y=(x^2+4x+2)^2$ と置くと

$\sqrt{1+4/x}=(1+1/x+1/(x+2))\sqrt{1-4/y}=(1+1/x+1/(x+2))(1-1/y-1/(y-2))\sqrt{1-4/(y^2-4y+2)^2}$ より

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\left(1-\frac{1}{y}-\frac{1}{y-2}\right)$$　　$y=((x+2)^2-2)^2$

この式を使用して$\sqrt{2}$を計算すると

$2=1.4^2+0.04$

$4\cdot 2/0.04=200$　　$200-2=198$

$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420969807856 9$

$1.4\left(1+\frac{1}{198}+\frac{1}{198-2}\right)\left(1-\frac{1}{(198^2-2)^2}-\frac{1}{(198^2-2)^2-2}\right)=1.41421356237309504880168872420969807907 6$

［36桁一致］

$\sqrt{1+4/x}=(1+1/x+1/(x+2))\sqrt{1-4/y}$ を使用し、$\sqrt{1-4/y}$ の近似式も付加した式を作成する。

平方根をn乗根に一般化すると、二項展開 $(1+t)^c=1+ct+c(c-1)t^2/2+\cdots$ より

$t=-2n/y$ ， $c=1/n$ の場合は

$$(1-2n/y)^{1/n}=1-2/y+(1/n)(1/n-1)(2n)^2/2y^2+\cdots$$
$$=1-2/y-2(n-1)/y^2+\cdots$$

y=1000	$(1-2n/y)^{1/n}$	= 0.9979919516
n=5	$1-2/y$	= 0.998
の数値例	$1-2/y-2(n-1)/y^2$	= 0.997992
	$1-2/(y-(n-1))$	= 0.9979919678

数値例において一番下の式は項数を減らしているが、直前の式より更に正確な値に近い。

平方根(n=2)の場合、$\sqrt{1-4/y}$ の近似式は $1-2/y$ よりも $1-2/(y-1)$ が正確な値に近い。

$$1-\frac{2}{y-1}=1-\frac{2}{(x^2+4x+2)^2-1}=1-\frac{2}{((x+2)^2-2)^2-1}=1-\frac{2}{((x+2)^2-1)((x+2)^2-3)}=1+\frac{1}{(x+2)^2-1}-\frac{1}{(x+2)^2-3}$$ より

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\left(1+\frac{1}{(x+2)^2-1}-\frac{1}{(x+2)^2-3}\right)$$ 分母で引く数を統一すると

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{(x+3)-1}+\frac{1}{(x+3)-3}\right)\left(1+\frac{1}{(x+2)^2-1}-\frac{1}{(x+2)^2-3}\right)$$

$a=r^2+s$ ， $d=4r^2/s$ の場合、$\sqrt{a}=r\sqrt{1+4/d}$ より

$$\sqrt{a}\fallingdotseq r\left(1+\frac{1}{(d+3)-1}+\frac{1}{(d+3)-3}\right)\left(1+\frac{1}{(d+2)^2-1}-\frac{1}{(d+2)^2-3}\right)$$

$10=3^2+1$
$4\cdot 10/1=40$

$$3\left(1+\frac{1}{39-1}+\frac{1}{39-3}\right)\left(1+\frac{1}{38^2-1}-\frac{1}{38^2-3}\right)=3.1622776601683793319$$
$$\sqrt{10}=3.1622776601683793327$$
[28桁一致]

$2=1.4^2+0.04$
$4\cdot 2/0.04=200$

$$1.4\left(1+\frac{1}{199-1}+\frac{1}{199-3}\right)\left(1+\frac{1}{198^2-1}-\frac{1}{198^2-3}\right)=1.4142135623730950488016887249$$
$$\sqrt{2}=1.4142135623730950488016887242$$

更に正確な値は $\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\left(1+\frac{1}{(x+3)-1}+\frac{1}{(x+3)-3}\right)\left(1-\frac{2}{((x+2)^2-1)((x+2)^2-3)}\right)\sqrt{1-\frac{4}{y(y-3)^2}}$ と

$y(y-3)^2-1=(x^2+4x+4)(x^2+4x+3)^2(x^2+4x+1)^2(x^2+4x)+3$ により計算出来る。例えば

$$1.4\left(1+\frac{1}{199-1}+\frac{1}{199-3}\right)\left(1-\frac{2}{(198^2-1)(198^2-3)}\right)\left(1-\frac{2}{198^2(198^2-1)^2(198^2-3)^2(198^2-4)+3}\right)$$
[82桁一致]

$$=1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070389095$$
$$\sqrt{2}=1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503$$

---

x， x+2， x+4 を使用した式に変形すると

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\left(1-\frac{2}{u+3}\right)\left(1-\frac{2}{(u+3)^2\ u+3}\right)$$ $u=x(x+2)^2(x+4)$

$$1.4\left(1+\frac{1}{196}+\frac{1}{198}\right)\left(1-\frac{2}{196\cdot 198^2\,200+3}\right)\left(1-\frac{2}{(196\cdot 198^2\,200+3)^2\ 196\cdot 198^2\,200+3}\right)$$
$$=1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070389095$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 6^2 8+3}\right)\left(1-\frac{2}{(4\cdot 6^2 8+3)^2\ 4\cdot 6^2 8+3}\right)\left(1-\frac{2}{((4\cdot 6^2 8+3)^2\ 4\cdot 6^2 8+3)^2\ (4\cdot 6^2 8+3)^2\ 4\cdot 6^2 8+3}\right)$$
$$=1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070389095$$

平方数の分数式により平方根の値を求める方法

$\sqrt{\frac{a}{b}} \fallingdotseq \frac{5a^2+10ab+b^2}{a^2+10ab+5b^2} = \frac{(4(a+b)+(a-b))^2-5(a-b)^2}{(4(a+b)-(a-b))^2-5(a-b)^2} = \frac{(4(a+b)/(a-b)+1)^2-5}{(4(a+b)/(a-b)-1)^2-5}$ を利用する。

$r=\sqrt{b}$ として $a=r^2+s$ の場合 $4(a+b)/(a-b)=4(a+b+a-a)/s=8a/s-4$ より

$$\sqrt{a} \fallingdotseq r\frac{p_1}{q_1}\ ,\quad f_1=\frac{8a}{s}-4\ ,\quad \begin{matrix} p_1=(f_1+1)^2-5 \\ q_1=(f_1-1)^2-5 \end{matrix}$$

$\sqrt{2}$ の例

$2=1.4^2+0.04$ $\quad f_1=\frac{8\cdot 2}{0.04}-4=396$ $\quad \begin{matrix} p_1=397^2-5=157604 \\ q_1=395^2-5=156020 \end{matrix}$

$\sqrt{2}=1.41421356237309$

$1.4\frac{397^2-5}{395^2-5}=1.41421356236379$

---

rp_1/q_1 を新たな近似値として、更に上記式を適用すると

$$\sqrt{a} \fallingdotseq r\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\ ,\quad f_2=\frac{8a}{a-(rp_1/q_1)^2}-4\ ,\quad \begin{matrix} p_2=(f_2+1)^2-5 \\ q_2=(f_2-1)^2-5 \end{matrix}$$

$\sqrt{2}$ の例

$$f_2=\frac{8\cdot 2}{2-(1.4\cdot 157604/156020)^2}-4=608556009996$$

[57桁一致]

$$1.4\frac{397^2-5}{395^2-5}\frac{608556009997^2-5}{608556009995^2-5}=1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317559$$

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667$$

上記式の別形式

最初の近似値が分数で $\sqrt{b}=\frac{p_0}{q_0}$ の場合 $b=\frac{p_0^2}{q_0^2}$ で $f_1=4\frac{a+b}{a-b}=4\frac{aq_0^2+p_0^2}{aq_0^2-p_0^2}$

$aq^2-p^2=h$ とすると $4(aq^2+p^2)/h$ は $4(2p^2+h)/h=8p^2/h+4$ あるいは $4(2aq^2-h)/h=8aq^2/h-4$ となるため

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{p_0p_1}{q_0q_1}\ ,\quad h_1=aq_0^2-p_0^2\ ,\quad \begin{matrix} f_1=8\ p_0^2/h_1+4 \\ f_1=8aq_0^2/h_1-4 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} p_1=(f_1+1)^2-5 \\ q_1=(f_1-1)^2-5 \end{matrix}$$

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{p_0p_1p_2}{q_0q_1q_2},\ h_2=a(q_0q_1)^2-(p_0p_1)^2,\quad \begin{matrix} f_2=8\ (p_0p_1)^2/h_2+4 \\ f_2=8a(q_0q_1)^2/h_2-4 \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} p_2=(f_2+1)^2-5 \\ q_2=(f_2-1)^2-5 \end{matrix}$$

$\sqrt{2}$ の例　近似分数は上記と同様

$a=2$
$p_0=7$
$q_0=5$

$h_1=2\cdot 5^2-7^2=1$

$f_1=8\cdot 7^2/1+4=396$
$f_1=8\cdot 2\cdot 5^2/1-4=396$

$\begin{matrix} p_1=397^2-5=157604 \\ q_1=395^2-5=156020 \end{matrix}$

$h_2=2(5\cdot 156020)^2-(7\cdot 157604)^2=16$

$f_2=8\ (7\cdot 157604)^2/16+4=608556009996$
$f_2=8\cdot 2(5\cdot 156020)^2/16-4=608556009996$
$780100^2-4=608556009996$

中間の式を減らした式

$$\sqrt{a} \fallingdotseq \frac{p_0}{q_0}\frac{(8\ {p_0}^2/h_1+5)^2-5}{(8{q_0}^2/h_1-5)^2-5}\ ,\quad h_1=\ a{q_0}^2-{p_0}^2$$

$\sqrt{2}$の例　　$h_1=\ 2\cdot 5^2-7^2=\ 1$

上記と同じ場合　　$\frac{7}{5}\frac{(8\cdot 49+5)^2-5}{(8\cdot 50-5)^2-5}=\ 1.41421356236379$

$$\sqrt{a} \fallingdotseq r\frac{(8r^2/s+5)^2-5}{(8\,a/s-5)^2-5}$$

($a=\ r^2+s$)

$\sqrt{10}$の例

$10=\ 3^2+1$

$3\frac{(72+5)^2-5}{(80-5)^2-5}=\ 3.162277580$

$\sqrt{10}=\ 3.162277660$

$$\sqrt{a} \fallingdotseq r\frac{(8\,a/s-3)^2-5}{(8\,a/s-5)^2-5}$$

$\sqrt{10}$の例

$10=\ 3^2+1$

$3\frac{(80-3)^2-5}{(80-5)^2-5}=\ 3.162277580$

1/x が0に近い場合

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \fallingdotseq \frac{(8x+5)^2-5}{(8x+3)^2-5}$$

$\sqrt{1.1}$の例

$x=\ 10$

$\sqrt{1.1}=\ 1.048808848$

$\frac{85^2-5}{83^2-5}=\ 1.048808832$

次の等式が成り立つ。

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} = \frac{(2x+5)^2-5}{(2x+3)^2-5}\sqrt{1+\frac{4}{x(x^2+5(x+1))^2}}$$

$\sqrt{1.4}$の例

$x=\ 10$

$\frac{25^2-5}{23^2-5}=\ 1.183206106$

$2\cdot 10\cdot 155^2=\ 480500$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(2x+5)^2-5}{(2x+3)^2-5}$$

$\frac{25^2-5}{23^2-5}\frac{480505^2-5}{480503^2-5}=\ 1.183215956619923208513465655 35$

$\sqrt{1.4}=\ 1.183215956619923208513465658 31$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+2)(x+3)-1}{(x+1)(x+2)-1}$$

$\frac{12\cdot 13-1}{11\cdot 12-1}\frac{240252\cdot 240253-1}{240251\cdot 240252-1}=\ 1.183215956619923208513465655 35$

$10\cdot 155^2=\ 240250$

多くの場合に「隣り合う奇数の平方数」や「隣り合う自然数の積」を持つ分数になる。

規則的な分数式

次の等式が成り立つ。　　［n］：右辺ルートの分母にあるxの最大次数

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\frac{(x+2)(x+1)(x+4)-1}{(x+2)(x+3)\quad x\quad +1}\sqrt{1+\frac{4}{x(x^3+7(x+1)^2)^2}}$$　　［7］

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\frac{(x+2)(x+1)(x+4)-1}{(x+2)(x+3)\quad x\quad +1}$$

$\sqrt{2}$の例　　$x=4$　　$\dfrac{6\cdot 5\cdot 8-1}{6\cdot 7\cdot 4+1}=1.414201$

上記式を変形すると

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\frac{(x+1)((x+3)^2-1)-1}{(x+3)((x+1)^2-1)+1}$$

$\sqrt{5}$の例　　$5=2^2+1$　　$x=4\cdot 5/1-4=16$　　$2\dfrac{17(19^2-1)-1}{19(17^2-1)+1}=2.23606797003$

$\sqrt{3}$の例　　$3=2^2-1$　　$x=4\cdot 3/(-1)-4=-16$　　$2\dfrac{15(13^2-1)+1}{13(15^2-1)-1}=1.73205084163$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\frac{(x+1)(x+3)^2-(x+2)}{(x+3)(x+1)^2-(x+2)}$$

$\sqrt{5}$の例　　$x=16$　　$2\dfrac{17\cdot 19^2-18}{19\cdot 17^2-18}=2.23606797003$

$\sqrt{3}$の例　　$x=-16$　　$2\dfrac{15\cdot 13^2-14}{13\cdot 15^2-14}=1.73205084163$

極めて単純な分数式

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\frac{(w+1)(w-1/w)-1}{(w-1)(w-1/w)-1}$$　　$w=x+2$

$\sqrt{5}$の例　　$w=16+2=18$　　$\sqrt{5}=2.23606797749$　　$2\dfrac{(18+1)(18-1/18)-1}{(18-1)(18-1/18)-1}=2.23606797003$

$\sqrt{3}$の例　　$w=-16+2=-14$　　$\sqrt{3}=1.73205080756$　　$2\dfrac{(14-1)(14-1/14)-1}{(14+1)(14-1/14)-1}=1.73205084163$

$\sqrt{2}$の例　　$2=1.4^2+0.04$　　$4\cdot 2/0.04-2=198$　　$\sqrt{2}=1.414213562373095$　　$1.4\dfrac{(198+1)(198-1/198)-1}{(198-1)(198-1/198)-1}=1.414213562373094$

$\sqrt{6}$の例　　$6=2.4^2+0.24$　　$4\cdot 6/0.24-2=98$　　$\sqrt{6}=2.449489742783178$　　$2.4\dfrac{(98+1)(98-1/98)-1}{(98-1)(98-1/98)-1}=2.449489742783121$

各種の近似式　　値は x=4 の場合　　[n] : 等式の右辺ルートの分母にあるxの最大次数

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{x+2}{x} \quad \left(= 1+\frac{2}{x} \right) \qquad [2] \qquad \frac{6}{4} = 1.5 \quad \left(= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \right)$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{x+3}{x+1} \quad \left(= 1+\frac{2}{x+1} \right) \qquad [3] \qquad \frac{7}{5} = 1.4 \quad \left(= 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} \right)$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+3)(x+1)-1}{(x+1)(x+1)-1} \quad \left(= 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} \right) \qquad [4] \qquad \frac{7\cdot 5-1}{5\cdot 5-1} = 1.4166 \quad \left(= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} \right)$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+3)(x+2)-1}{(x+1)(x+2)-1} \quad \left(= \frac{(x+1)(x+4)+1}{(x+3)\quad x\quad +1} \right) \qquad [5] \qquad \frac{7\cdot 6-1}{5\cdot 6-1} = 1.41379 \quad \left(= \frac{5\cdot 8+1}{7\cdot 4+1} \right)$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+1)(x+4)-1/(x+2)}{(x+3)\quad x\quad +1/(x+2)} \qquad [7] \qquad \frac{5\cdot 8-1/6}{7\cdot 4+1/6} = 1.41420$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+1)(x+4)-1/(x+1)}{(x+3)\quad x\quad +1/(x+3)} \qquad [9] \qquad \frac{5\cdot 8-1/5}{7\cdot 4+1/7} = 1.41421319$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{\{(x+3)\quad x\quad +1\}(x+4)-1/(x+1)(x+3)}{\{(x+1)(x+4)+1\}\quad x\quad +1/(x+1)(x+3)} \qquad [11] \qquad \frac{(7\cdot 4+1)8-1/5\cdot 7}{(5\cdot 8+1)4+1/5\cdot 7} = 1.414213551$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{\{(x+3)\quad x\quad +1\}(x+4)-1/\{(x+3)\quad x\quad +1\}}{\{(x+1)(x+4)+1\}\quad x\quad +1/\{(x+1)(x+4)+1\}} \qquad [15] \qquad \frac{(7\cdot 4+1)8-1/(7\cdot 4+1)}{(5\cdot 8+1)4+1/(5\cdot 8+1)} = 1.41421356236379$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+1)(x+4)+1}{(x+3)\quad x\quad +1} \frac{\{(x+1)(x+2)(x+3)\quad x\quad +1\}\{(x+4)(x+2)(x+3)\quad x\quad +1\}(x+1)(x+4)+1}{\{(x+3)(x+2)(x+1)(x+4)+1\}\{\quad x\quad (x+2)(x+1)(x+4)+1\}(x+3)\quad x\quad +1} \qquad [25]$$

$$\frac{5\cdot 8+1}{7\cdot 4+1} \frac{(5\cdot 6\cdot\ \ 7\cdot 4+1)(8\cdot 6\cdot\ \ 7\cdot 4+1)\ \ 5\cdot 8+1}{(7\cdot 6\cdot\ \ 5\cdot 8+1)(4\cdot 6\cdot\ \ 5\cdot 8+1)\ \ 7\cdot 4+1} = 1.414213562373095048596$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} \fallingdotseq \frac{(x+3)\ \{(x+3)\quad x\quad +1/(x+3)\}\ (x+1)(x+4)-1/(x+1)\ \{(x+3)\quad x\quad +1/(x+3)\}\ (x+3)}{(x+1)\ \{(x+1)(x+4)-1/(x+1)\}\ (x+3)\quad x\quad +1/(x+3)\ \{(x+1)(x+4)-1/(x+1)\}\ (x+1)} \qquad [27]$$

x+3= (x+4)-1 とすると、 4+1と8-1の平面的な二重螺旋となる。$\sqrt{2}$= 1.414213562373095048801

$$\frac{(8-1)\ \{(8-1)4+1/(8-1)\}\ (4+1)8-1/(4+1)\ \{(8-1)4+1/(8-1)\}\ (8-1)}{(4+1)\ \{(4+1)8-1/(4+1)\}\ (8-1)4+1/(8-1)\ \{(4+1)8-1/(4+1)\}\ (4+1)} = 1.414213562373095048795$$

$$\frac{(4+1)\{(8-1)^2 4+1\}\ 8-1\ /\ (4+1)\{(8-1)^2 4+1\}}{(8-1)\{(4+1)^2 8-1\}\ 4+1\ /\ (8-1)\{(4+1)^2 8-1\}} = 1.414213562373095048795$$

上記式の多くは二項展開比から導いている。 a= $1+\frac{4}{x}$, b= 1 として[4]の例は

$$\sqrt{b}\frac{a^2+6ab+b^2}{4ab+4b^2} = \frac{x^2+4x+2}{x^2+2x} \qquad (x^2+4x+2)+1 = (x+3)(x+1) \qquad \frac{x+4}{x}\left(\frac{x^2+4x+2}{x^2+2x}\right)^{-2}-1 = \frac{-4}{(x^2+4x+2)^2}$$

$$(x^2+2x)\ \ +1 = (x+1)^2$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}} = \frac{(x+3)(x+1)-1}{(x+1)(x+1)-1}\sqrt{1-\frac{4}{(x^2+4x+2)^2}}$$

ニュートン法による近似式は $\sqrt{b}\frac{a+b}{2b} = \frac{(1+4/x)+1}{2} = 1+\frac{2}{x}$ であり、一番上の式に相当する。

次の等式は、繰り返し使用する場合、単純な規則の式になる。

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\frac{x+3}{x+1}\sqrt{1+\frac{4}{(x+3)^2x}}=\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\sqrt{1+\frac{4}{(x+1)^2(x+4)-4}}$$

$(x+3)^2\ x\ \ =x^3+6x^2+9x$

$(x+1)^2(x+4)=x^3+6x^2+9x+4$

上記式の x を f(x)−4 あるいは −(f(x)+4) と置けば

$$\sqrt{1+\frac{4}{f(x)-4}}=\left(1+\frac{2}{f(x)-3}\right)\sqrt{1+\frac{4}{(f(x)-3)^2\ f(x)-4}}$$

$$\sqrt{1-\frac{4}{f(x)+4}}=\left(1-\frac{2}{f(x)+3}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(f(x)+3)^2\ f(x)+4}}$$

（ 一般式 ）

元の式は f(x)−4= x つまり f(x)= x+4 の場合であるので

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{2}{(x+4)-3}\right)\left(1+\frac{2}{((x+4)-3)^2\ \ (x+4)-3}\right)\left(1+\frac{2}{\{((x+4)-3)^2\ \ (x+4)-3\}^2\ \ ((x+4)-3)^2\ \ (x+4)-3}\right)$$

$$\left(1+\frac{2}{8-3}\right)\left(1+\frac{2}{(8-3)^2\ \ 8-3}\right)\left(1+\frac{2}{((8-3)^2\ \ 8-3)^2\ \ (8-3)^2\ \ 8-3}\right)=1.414213562373095048795$$

---

a= r^2+s の場合 $\sqrt{a}=r\sqrt{1+s/r^2}=r\sqrt{1+4/(4r^2/s)}=r\sqrt{1+4/(4(a-s)/s)}=r\sqrt{1+4/((4a/s)-4)}$ より

$$\sqrt{a}\fallingdotseq r\{1-2/(3-4a/s)\}$$

$$\sqrt{a}\fallingdotseq r\{1-2/(3-4a/s)\}\{1-2/(3-(4a/s)\ \ (3-4a/s)^2)\}$$

$\sqrt{5}=2.2360679774997$

5= 2^2+1 の場合 $2\{1-2/(3-4\cdot 5)\}\{1-2/(3-4\cdot 5\ \ (3-4\cdot 5)^2)\}=2.2360679774766$

$\sqrt{8}=2.8284271247461$

8= 3^2-1 の場合 $3\{1-2/(3+4\cdot 8)\}\{1-2/(3+4\cdot 8\ \ (3+4\cdot 8)^2)\}=2.8284271247462$

次の等式の右辺ルート部分に一般式を適用すると、同様な式に繰り返し展開する事が出来る。

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{x(x+2)^2(x+4)+4}}$$

$f(x)=x(x+2)^2(x+4)$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\left(1-\frac{2}{x(x+2)^2(x+4)+3}\right)\left(1-\frac{2}{\{x(x+2)^2(x+4)+3\}^2\ \ x(x+2)^2(x+4)+3}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 6^2 8+3}\right)\left(1-\frac{2}{(4\cdot 6^2 8+3)^2\ \ 4\cdot 6^2 8+3}\right)=1.414213562373095048801688724988$$

$4\cdot 6^2 8=1152$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{2}{1152+3}\right)\left(1-\frac{2}{(1152+3)^2\ \ 1152+3}\right)=1.414213562373095048801688724988$$

$\sqrt{2}=1.414213562373095048801688724209$

一般式ではなく $\sqrt{1-\frac{4}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{x(x-2)^2(x-4)+4}}$ を上記式の右辺ルート部分に適用すると

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\left(1-\frac{1}{(x+4)\ (x+2)^2\ \ x+2}-\frac{1}{(x+4)\ (x+2)^2\ \ x+4}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{4}{\{(x+4)\ (x+2)^2\ \ x+4\}\{(x+4)\ (x+2)^2\ \ x+2\}^2\ \ (x+4)\ (x+2)^2\ \ x+4}}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{1154}-\frac{1}{1156}\right)\left(1-\frac{1}{1152\cdot 1154^2\ \ 1156+2}-\frac{1}{1152\cdot 1154^2\ \ 1156+4}\right)$$

$=1.41421356237309504880168872420969807856967187537 72$

$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69$

次の等式も同様である。

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\frac{(x+1)(x+4)-1/(x+1)}{(x+3)\quad x\quad +1/(x+3)}\sqrt{1+\frac{4}{\{(x+1)^2(x+4)-3\}^2\quad (x+1)^2(x+4)-4}}$$

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}\fallingdotseq\frac{(x+1)(x+4)-1/(x+1)}{(x+3)\quad x\quad +1/(x+3)}\left(1+\frac{2}{\{(x+1)^2(x+4)-3\}^2\quad (x+1)^2(x+4)-3}\right)$$

$$\frac{5\cdot 8-1/5}{7\cdot 4+1/7}\left(1+\frac{2}{(5^2 8-3)^2\quad 5^2 8-3}\right)=1.414213562373095048795$$

$$\frac{(4+1)8-1/(4+1)}{(8-1)4+1/(8-1)}\left(1+\frac{2}{\{(8-3)^2 8-3\}^2\quad (8-3)^2 8-3}\right)=1.414213562373095048795\qquad (8-3)^2 8=200$$

$$\frac{5\cdot 8-1/5}{7\cdot 4+1/7}\left(1+\frac{1}{(200-3)^2\quad 200-2}+\frac{1}{(200-3)^2\quad 200-4}\right)=1.414213562373095048801680168724$$

$$\frac{(4+1)8-1/(4+1)}{(8-1)4+1/(8-1)}\left(1+\frac{2}{(200-3)^2\quad 200-3}\right)\left(1+\frac{2}{\{(200-3)^2\quad 200-3\}^2\quad (200-3)^2\quad 200-3}\right)$$

$=1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679710 3$

$\sqrt{2}=1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737 9$

$3=2^2-1$ の場合

$$2\frac{(16-1)12+1/(16-1)}{(12+1)16-1/(12+1)}\left(1-\frac{2}{(2700+3)^2\quad 2700+3}\right)=1.732050807568877293527446341506 3$$

$(12+3)^2 12=2700$

$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505 8$

分母と分子で使用する数を漸化式で求める。

分数式（±3）

$\sqrt{2}$ の例　$1^2=\boxed{2-1}$

$4\cdot\boxed{2/1}=8$

$(8-3)^2 8=200$

$(200-3)^2 200=7761800$

$$1\frac{8-1}{8-3}\frac{200-1}{200-3}\frac{7761800-1}{7761800-3}=1.414213562373095048795$$

$\sqrt{2}=1.414213562373095048801$

$$1\frac{8-1}{8-3}\frac{200-1}{200-3}=1.41421319796$$

$\sqrt{3}$ の例　$2^2=\boxed{3+1}$

$4\cdot\boxed{3/1}=12$

$(12+3)^2 12=2700$

$(2700+3)^2 2700=19726764300$

$$2\frac{12+1}{12+3}\frac{2700+1}{2700+3}=1.732050807568877293527446341506$$ ［10桁一致］

$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505$

↓3倍

$$2\frac{12+1}{12+3}\frac{2700+1}{2700+3}\frac{19726764300+1}{19726764300+3}=1.732050807568877293527446341506 32$$ ［30桁一致］

$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505 87$

参考：$\lfloor(2+\sqrt{3})^{18}+1/2\rfloor=19726764302$　$\lfloor(2+\sqrt{3})^{6}+1/2\rfloor=2702$　$\lfloor(2+\sqrt{3})^{2}+1/2\rfloor=14$

$\sqrt{7}$ の例　$3^2=\boxed{7+2}$

$4\cdot\boxed{7/2}=14$

$(14+3)^2 14=4046$

$$3\frac{14+1}{14+3}\frac{4046+1}{4046+3}=2.64575131114$$

$\sqrt{7}=2.64575131106$

分数式（連続積5個）

$\sqrt{2}$の例　$1^2=\boxed{2-1}$

$4\cdot\boxed{2/1}=8$

$8+8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6728$

$6728+6728\cdot 6727\cdot 6726\cdot 6725\cdot 6724=13765255184676885128$

$$\sqrt{2}=1.414213562373095048801$$

$$1\frac{5\cdot 8+1}{7\cdot 4+1}\frac{6725\cdot 6728+1}{6727\cdot 6724+1}=1.414213562373095048596$$

$$1\frac{5\cdot 8+1}{7\cdot 4+1}\frac{6725\cdot 6728+1}{6727\cdot 6724+1}\frac{13765255184676885125\cdot 13765255184676885128+1}{13765255184676885127\cdot 13765255184676885124+1}-\sqrt{2}=-5.72\times10^{-96}$$

参考：　$\lfloor(1+\sqrt{2})^{10}+1/2\rfloor=6726$　　$\lfloor(1+\sqrt{2})^{2}+1/2\rfloor=6$

$\sqrt{3}$の例　$2^2=\boxed{3+1}$

$4\cdot\boxed{3/1}=12$

$12+12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16=524172$

$$2\frac{15\cdot 12+1}{13\cdot 16+1}\frac{524175\cdot 524172+1}{524173\cdot 524176+1}=1.732050807568877293527446341593 4$$

$$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505 8$$

参考：　$\lfloor(2+\sqrt{3})^{10}+1/2\rfloor=524174$　　$\lfloor(2+\sqrt{3})^{2}+1/2\rfloor=14$

分数式（±5）

$\sqrt{2}$の例　$1^2=\boxed{2-1}$

$8\cdot\boxed{2/1}-5=11$

$(11+5)(11^2-5)^2/16-5=13451$

$(13451+5)(13451^2-5)^2/16-5=27530510369353770251$　↑5倍

$1+2=3$

$$1\frac{13^2-5}{11^2-5}\frac{13453^2-5}{13451^2-5}\frac{27530510369353770253^2-5}{27530510369353770251^2-5}-\sqrt{2}=-5.72\times10^{-96}$$

［95桁一致］

$$1\frac{13^2-5}{11^2-5}\frac{13453^2-5}{13451^2-5}=1.414213562373095048596$$

［19桁一致］

参考：$2\lfloor(1+\sqrt{2})^{10}+1/2\rfloor=13452$　　$\sqrt{2}=1.414213562373095048801$

$\sqrt{3}$の例　$2^2=\boxed{3+1}$

$8\cdot\boxed{3/1}+5=29$

$(29-5)(29^2-5)^2/16+5=1048349$

$9-2=7$

$$2\frac{27^2-5}{29^2-5}\frac{1048347^2-5}{1048349^2-5}=1.732050807568877293527446341593 4$$

$$\sqrt{3}=1.732050807568877293527446341505 8$$

$\sqrt{7}$の例　$3^2=\boxed{7+2}$

$8\cdot\boxed{7/2}+5=33$

$(33-5)(33^2-5)^2/16+5=2056353$

$3-2=1$

$$3\frac{31^2-5}{33^2-5}\frac{2056351^2-5}{2056353^2-5}=2.645751311064590590501615753643 8$$

$$\sqrt{7}=2.645751311064590590501615753639 2$$

$(2056353-5)(2056353^2-5)^2/16+5=22980914487793688398398456307 53$

分数式（±7…）

$\sqrt{2}$の例　$1^2=\boxed{2-1}$　$4+1=5$　$1\dfrac{4^3+5^2 7}{8^3-7^2 7}=1.41420118343$

$4\cdot\boxed{2/1}=8$　$8-1=7$

$8(8^3-7^2 7)^2=228488$　$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420969807856 9$

$1^2=2\cdot\dfrac{4}{8}$　$1\dfrac{4^3+5^2 7}{8^3-7^2 7}\dfrac{228484^3+228485^2 7}{228488^3-228487^2 7}=1.41421356237309504880168872420969807848 2$

$\sqrt{3}$の例　$2^2=\boxed{3+1}$　$6-1=5$　$2\dfrac{16^3-15^2 7}{12^3+13^2 7}=1.73205084163$［8桁一致］

$4\cdot\boxed{3/1}=12$　$2+1=3$

$12(12^3+13^2 7)^2=101687052$　$\sqrt{3}=1.73205080756$ ↓7倍

$2^2=3\cdot\dfrac{16}{12}$　$2\dfrac{16^3-15^2 7}{12^3+13^2 7}\dfrac{101687056^3-101687055^2 7}{101687052^3+101687053^2 7}-\sqrt{3}=3.08\times10^{-56}$［56桁一致］

参考：$\lfloor(2+\sqrt{3})^{14}+1/2\rfloor=101687054$　$\lfloor(2+\sqrt{3})^{2}+1/2\rfloor=14$

$\sqrt{7}$の例　$3^2=\boxed{7+2}$　$8-1=7$　$3\dfrac{18^3-17^2 7}{14^3+15^2 7}=2.64575133132$

$4\cdot\boxed{7/2}=14$　$4+1=5$

$\sqrt{7}=2.64575131106$

$3^2=7\cdot\dfrac{18}{14}$　←　分母と分子の差が4

分数式（±9…）

$\sqrt{2}$の例　$1^2=\boxed{2-1}$　$1\dfrac{4(4^3+3)+5^3 9}{8(8^3-3)-7^3 9}\dfrac{7761796(7761796^3+3)+7761797^3 9}{7761800(7761800^3-3)-7761799^3 9}-\sqrt{2}=-2.76\times10^{-62}$

$4\cdot\boxed{2/1}=8$

$8\{8(8^3-3)-7^3 9\}^2=7761800$　$1^2=2\cdot\dfrac{4}{8}$　$1\dfrac{4(4^3+3)+5^3 9}{8(8^3-3)-7^3 9}=1.41421319796$

参考：$\lfloor(1+\sqrt{2})^{18}+1/2\rfloor=7761798$　$\sqrt{2}=1.41421356237$

$\sqrt{3}$の例　$2^2=\boxed{3+1}$　$2^2=3\cdot\dfrac{16}{12}$　$2\dfrac{16(16^3-3)-15^3 9}{12(12^3+3)+13^3 9}=1.73205080774$

$4\cdot\boxed{3/1}=12$　$\sqrt{3}=1.73205080756$

$12\{12(12^3+3)+13^3 9\}^2=19726764300$

参考：$\lfloor(2+\sqrt{3})^{18}+1/2\rfloor=19726764302$

$\sqrt{7}$の例　$3^2=\boxed{7+2}$　$3^2=7\cdot\dfrac{18}{14}$　$3\dfrac{18(18^3-3)-17^3 9}{14(14^3+3)+15^3 9}=2.64575131114$

$4\cdot\boxed{7/2}=14$　$\sqrt{7}=2.64575131106$

$14\{14(14^3+3)+15^3 9\}^2=66331746446$

参考：$\lfloor(3+\sqrt{7})^{18}+1/2\rfloor/2^9=66331746448$　$\lfloor(3+\sqrt{7})^{2}+1/2\rfloor/2=16$

別の	$1^2=\boxed{2-1}$	$4(\boxed{2/1}-1)=4$	$4(4+3)^2=196$	$196(196+3)^2=7761796$
計算	$2^2=\boxed{3+1}$	$4(\boxed{3/1}+1)=16$	$16(16-3)^2=2704$	$2704(2704-3)^2=19726764304$
方法	$3^2=\boxed{7+2}$	$4(\boxed{7/2}+1)=18$	$18(18-3)^2=4050$	$4050(4050-3)^2=66331746450$

2018/11/20　新規
2019/05/26　計算量を減らす単純な式を追加
2019/06/10　二項展開の結果や連分数を使用した計算方法を追加
2019/10/01　ある桁までの確定数値を求める方法を追加
2019/10/28　単純な分数式により値を求める方法を追加
2020/02/14　平方数の分数式により値を求める方法を追加
2020/07/28　積がaに等しい正の二変数の平均値と$\sqrt{a}$の位置関係を追加
2020/12/07　規則的な分数式を追加

数学研究ノート

小規模更新日
今回　2022/08/26
前回　2022/07/12