

慣れた10進法とは別の進法を採用すると、少し異なる風景が見えるはずだ。  
進法に共通な部分と異なる部分を調べる。

n進法の筆算

初めに「n進数の掛け算を筆算で行う」便利な方法を考える。

- ・位取りはn進法で、計算は10進法で行う。
- ・最初に各桁毎に分配乗算する。
- ・以後は各桁毎にn未満の数に変換し、必要なら繰り上げる。全てn未満の数になれば終了する。
- ・場合によっては前後で1桁から数桁の単位で基数変換を行う。

7進法 (615)<sub>7</sub>(26)<sub>7</sub> = (23562)<sub>7</sub> の例

	12	36+2	6+10	30
	12	38	16	30
+1	5+5	3+2	2+4	2
1	10	5	6	2
1+1	3	5	6	2
2	3	5	6	2

整数の場合

各桁毎に分配乗算  
加算  $38=5 \cdot 7+3$   
7j+mの最大j(0≦m)を左に+jとして繰り上げ、mを残す  
加算  $10=1 \cdot 7+3$   
7j+mの最大j(0≦m)を左に+jとして繰り上げ、mを残す  
加算 全て7未満になり終了

(61.5)<sub>7</sub>(2.46)<sub>7</sub> = (225.522)<sub>7</sub> の例

	12	24+2	36+4+10	6+20	30
	12	26	50	26	30
+1	5+3	5+7	1+3	5+4	2
1	8	12	4	9	2
1+1	1+1	5	4+1	2	2
2	2	5	5	2	2

小数の場合

各桁毎に分配乗算 小数点を置く  
7j+m  
7j+m  
全て7未満になり終了 小数点を置く

10進法 (951)(19) = 18069 の例

	9	81+5	45+1	9
	9	86	46	9
	9+8	6+4	6	9
	17	10	6	9
+1	7+1	0	6	9
1	8	0	6	9

比較用の参考筆算

各桁毎に分配乗算  
10j+m  
10j+m  
全て10未満になり終了

16進法 (C3)<sub>16</sub>(1A3)<sub>16</sub> = (13F29)<sub>16</sub> の例  
({12}3) (1{10}3)

	12	120+3	36+30	9
	12	123	66	9
	12+7	11+4	2	9
	19	15	2	9
+1	3	15	2	9
1	3	15	2	9
1	3	F	2	9

11進法以上では、前後にA～と10～の間で変換を行う

A～Fを10～15へ変換 (慣れれば頭の中で)  
各桁毎に分配乗算  
16j+m  
16j+m  
全て16未満  
10～15をA～Fへ変換

2進法 (100101)<sub>2</sub>(110001011)<sub>2</sub> = (11100100010111)<sub>2</sub> の例 (冗長なため8進数を経由する方法)  
(45)<sub>8</sub>(613)<sub>8</sub>

	24	4+30	12+5	15
	24	34	17	15
+3	0+4	2+2	1+1	7
3	4	4	2	7
11	100	100	010	111

下位から3桁毎に8進数へ変換  
各桁毎に分配乗算  
8j+m  
全て8未満  
各桁毎に2進数へ変換

3進法で冗長な場合は、9進数を経由する方法も有る。

筆算の原理は下記の様な計算式による変形である。

位取りは $n^k$ を使用し、各桁の数は10進数で計算する。

各桁毎に $n$ 未満の数に変換し、必要なら繰り上げる。

要所にある式の項 $an^k$ の $a$ を、位取りの位置に記入する。

$(615)_7(26)_7 = (23562)_7$  の例

$$\begin{aligned} & (6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 5)(2 \cdot 7 + 6) \\ = & 12 \cdot 7^3 + 36 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 10 \cdot 7 + 30 \\ = & 12 \cdot 7^3 + (36+2)7^2 + (6+10)7 + 30 \\ = & 12 \cdot 7^3 + 38 \cdot 7^2 + 16 \cdot 7 + 30 \\ = & (1 \cdot 7 + 5)7^3 + (5 \cdot 7 + 3)7^2 + (2 \cdot 7 + 2)7 + (4 \cdot 7 + 2) \\ = & 1 \cdot 7^4 + (5+5)7^3 + (3+2)7^2 + (2+4)7 + 2 \\ = & 1 \cdot 7^4 + 10 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 \\ = & 1 \cdot 7^4 + (1 \cdot 7 + 3)7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 \\ = & (1+1)7^4 + 3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 \\ = & 2 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 \end{aligned}$$

$7^4$	$7^3$	$7^2$	$7^1$	$7^0$
	12	36+2	6+10	30
	12	38	16	30
+1	5+5	3+2	2+4	2
1	10	5	6	2
1+1	3	5	6	2
2	3	5	6	2

同様に「 $n$ 進数の割り算を筆算で行う」方法を考える。

$(1234)_7 / (12)_7 = (102.530530530)_7$  の例

結果の整数部分は7進法で計算

100+34/12
102+10/12
7/9
0 . 49/9
5 28/9
3 7/9
0 49/9
5
102 . 5 3 0 5 ...

$$\begin{aligned} 1234 - 100 \cdot 12 &= 34 \\ 34 - 2 \cdot 12 &= 10 & 1 \cdot 7 + 0 &= 7 & 1 \cdot 7 + 2 &= 9 \\ \text{結果の小数部分は10進法で計算(位取りは7}^k\text{)} \\ (7 - 0 \cdot 9)7 &= 49 \\ (49 - 5 \cdot 9)7 &= 28 \\ (28 - 3 \cdot 9)7 &= 7 \\ (7 - 0 \cdot 9)7 &= 49 \\ \text{以降は530を繰り返す} \end{aligned}$$

$(101101)_2 / (11)_2 = (1111)_2$  の例

8進数を経由する方法

$(55)_8 / (3)_8$

10+	25/3
8+	21/3
8+	7
1	111

3桁毎に8進数へ変換

$$(55)_8 - (30)_8 = (25)_8$$

10進数に変換

2進数に変換

n進法からm進法への「基数変換を筆算で行う」方法を考える。

- ・位取りはm進法で、計算は10進法で行う。
- ・最初に $n^k$ の桁の数字を $(n/m)^k$ 倍する。
- ・他は乗算の場合と同様(繰り下げる事もある)。

例  $n^2$   $n^1$   $n^0$   $n^{-1}$   $n^{-2}$   
 $k : 2$     1    0    -1    -2

(小数は切り捨て表示)

10→7進法     $12.34 = (15.2244224422442)_7$     の例

1	2	3	4				
1/0.7	2	2.1	1.96				
1	3+2	2	0.7+1.96				
1	5	2	2.66				
1	5	2	2	4.62			
1	5	2	2	4	4.34		
1	5	2	2	4	4	2.38	
1	5	2	2	4	4	2	2.66
1	5	2	2	4	4	2	2...

$(10/7)^k$      $3 \cdot 0.7 = 2.1$      $4 \cdot 0.7^2 = 1.96$   
 $1/0.7 = 1+3/7$      $0.1 \cdot 7 = 0.7$   
 $0.66 \cdot 7 = 4.62$   
 $0.62 \cdot 7 = 4.34$   
 $0.34 \cdot 7 = 2.38$   
 $0.38 \cdot 7 = 2.66$

以下は繰り返し

7→10進法     $(126.36)_7 = 69.5510204081632$     の例

1	2	6	3	6			
0.49	1.4	6	3/0.7	6/0.49			
0	4.9+1.4	6	0	(21+6)/0.49			
	6.3	6	0	27/0.49			
	6	3+6	5	5	1	0	2...
	6	9	5	5	1	0	2...

10進数への変換なので小数部分はまとめて計算

$(7/10)^k$   
 $3 \cdot 7 = 21$

$27/0.49 = 55.1020408163265$

8→4進法     $(1433)_8 = (30123)_4$     の例

	1	4	3	3
	8	16	6	3
+2	0+4	0+1	2	3
2+1	0	1	2	3
3	0	1	2	3

$(8/4)^k = 2^k$

10→2進法  $29.75 = (11101.11)_2$  の例

2	9 .	7	5
2.5	9	5.6	3.2
2	4+9	5	4.8+3.2
2	13	5	8
2+1	5	5+1	0
3	5 .	6	
11	101 .	110	

8進数を経由する  $29.75 = (35.6)_8$

$$(10/8)^k \quad 2/0.8 = 2.5 \quad 7 \cdot 0.8 = 5.6 \quad 5 \cdot 0.8^2 = 3.2$$

$$0.5 \cdot 8 = 4 \quad 0.6 \cdot 8 = 4.8$$

8進数  
各桁毎に2進数へ変換

2→10進法  $(11101.11)_2 = 29.75$  の例

3	5 .	6	
2.4	5	7.5	
2	4+5	7	5
2	9 .	7	5

8進数を経由する  $(11101.11)_2 = (35.6)_8$

8進数へ変換

$$(8/10)^k \quad 3 \cdot 0.8 = 2.4 \quad 6/0.8 = 7.5$$

(桁数が多い場合は16進数を経由する方法も有る)

10→16進法  $29.75 = (1D.C)_{16}$  の例

2	9 .	7	5
1.25	9	11.2	12.8
1	4+9	11	3.2+12.8
1	13	11	16
1	13	12	
1	D .	C	

$$(10/16)^k \quad 2/1.6 = 1.25 \quad 7 \cdot 1.6 = 11.2 \quad 5 \cdot 1.6^2 = 12.8$$

$$0.25 \cdot 16 = 4 \quad 0.2 \cdot 16 = 3.2$$

16を繰り上げ  
10～15をA～Fへ変換

16→10進法  $(1D.C)_{16} = 29.75$  の例

1	{13} .	{12}	
1.6	13	7.5	
1+1	6+3	7	5
2	9 .	7	5

A～Fを10～15へ変換 (慣れれば頭の中で)

$$(16/10)^k \quad 1 \cdot 1.6 = 1.6 \quad 12/1.6 = 7.5$$

16→8進法  $(1D.C)_{16} = (35.6)_8$  の例

1	{13} .	{12}	
2	13	6	
2+1	5	6	
3	5 .	6	

A～Fを10～15へ変換 (慣れれば頭の中で)

$$(16/8)^k = 2^k$$

8→16進法  $(35.6)_8 = (1D.C)_{16}$  の例

3	5 .	6	
1.5	5	12	
1	8+5	12	
1	13	12	
1	D .	C	

$$(8/16)^k = 1/2^k$$

$$0.5 \cdot 16 = 8$$

10～15をA～Fへ変換

以上とは少し異なり、引き算による方法で基数変換する。位取りは途中でm進法に変化する。

10→2進法  $0.375 = (0.011)_2$  の例 小数の場合  $5^1, 5^2, 5^3, \dots$  を引けるまで10進法で繰り返し下げる

	5	25	125
0 .	3	7	5
0	0	37	5
0	0	1	125
0 .	0	1	1

5未満の 3 を繰り返し下げる  
 $37-25=12$  を繰り返し下げる 引けたので1を記入  
 $125-125=0$  になり終了 引けたので1を記入

10→2進法  $29.75 = (11101.11)_2$  の例 整数部分は最大の  $2^k$  を引く。小数部分は前記と同様。

16	8	4	2	1	5	25
			2	9 .	7	5
1			1	3	1	25
	1			5		1
		1		1		
1	1	1	0	1 .	1	1

$29-16=13$        $7-5=2$   
 $13-8=5$        $25-25=0$   
 $5-4=1$

10進法の有限小数は、2進法に変換すると循環小数になるものが多い。

小数点以下1桁

$$0.1 = (0.0\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ \dots)_2$$

(0011)<sub>2</sub> = 3      循環節は4桁

$$0.1 = 1/2 \cdot 5 = 3/2(2^4-1) \qquad 2(2^4-1)/10 = 3$$

$$0.1 = (0.1999\dots)_{16} = (0.0001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ \dots)_2$$

$$0.1 = (1+9/(2^4-1))/2^4$$

0.1の奇数倍の例

$$0.1 = (0.00011001100110011\dots)_2$$

$$0.3 = (0.01001100110011001\dots)_2$$

$$0.5 = (0.1)_2$$

$$0.7 = (0.10110011001100110\dots)_2$$

$$0.9 = (0.11100110011001100\dots)_2$$

$$0.3 = (0.01001100110011001\dots)_2 = (0.4CCC\dots)_{16}$$

$$0.1 = (0.00011001100110011\dots)_2 = (0.1999\dots)_{16}$$

$$0.7 = (0.10110011001100110\dots)_2 = (0.B333\dots)_{16}$$

$$0.9 = (0.11100110011001100\dots)_2 = (0.E666\dots)_{16}$$

1/5 は 1/2<sup>k</sup> には変形出来ないが、  
j/(2<sup>k</sup>-1) に変形出来る。(j=3, k=4)

$$\frac{j}{2^k-1} = \frac{j/2^k}{1-1/2^k} = \frac{j}{2^k} + \frac{j}{2^{2k}} + \frac{j}{2^{3k}} + \dots$$

これは2<sup>k</sup>進法で "0. jjj..." であり、  
2進法ではk桁の循環節jを繰り返す。

$$1/5 = (0.001100110011\dots)_2$$

小数点以下2桁

$$0.01 = (0.00\ 00001010001111010111\ 00001010001111010111\ 00001010001111010111\ \dots)_2$$

(00001010001111010111)<sub>2</sub> = 41943      循環節は20桁

$$0.01 = 1/2^2 \cdot 25 = 41943/2^2(2^{20}-1) \qquad 2^2(2^{20}-1)/100 = 41943$$

0.01の奇数倍の例

$$0.05 = (0.00\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ \dots)_2 \qquad 0.1の1桁右シフト$$

$$0.07 = (0.00\ 01000111101011100001\ 01000111101011100001\ 01000111101011100001\ \dots)_2$$

小数点以下3桁

$$0.001 = (0.000$$

$$00000010000011000100100110111010010111100011010100$$

$$1111101111100111011011001000101101000011100101011 \qquad \text{左の各行は50桁}$$

$$00000010000011000100100110111010010111100011010100$$

$$1111101111100111011011001000101101000011100101011 \dots)_2$$

$$(00000010000011000100100110111010010111100011010100 \qquad \text{循環節は100桁}$$

$$1111101111100111011011001000101101000011100101011)_2 = 10141204801825835211973625643$$

$$2^3(2^{100}-1)/1000 = 10141204801825835211973625643$$

$$0.001 = 1/2^3 \cdot 125 = 10141204801825835211973625643/2^3(2^{100}-1)$$

小数点以下4桁

$$0.0001 = 1/2^4 \cdot 625 \quad (\text{具体的な数字は省略}) \quad \text{循環節は500桁}$$

循環節の桁数は 4, 20, 100, 500 と5倍の関係になっている。

参考

$2^1 16^1 =$	32
$2^2 16^5 =$	4194304
$2^3 16^{25} =$	1014120480 ... 3625643008
$2^4 16^{125} =$	5237424972 ... 6441430016
$2^5 16^{625} =$	1202649675 ... 3664300032

## 同一数字の小数

$1/3 = 0.33333\cdots$  は同一数字が無限に続く代表的な小数であるが、一般的なn進法での法則を調べる。

$$\frac{1}{k} = \frac{j}{jk} = \frac{j}{(jk+1)-1} = \frac{j/(jk+1)}{1-1/(jk+1)} = \frac{j}{jk+1} + \frac{j}{(jk+1)^2} + \frac{j}{(jk+1)^3} + \cdots = (0. jjj\cdots)_{jk+1} \text{ より}$$

自然数jとkに対して、 $1/k$ が $0. jjjjj\cdots$ となるのは $jk+1$ 進法である。

$1/3 = (0. 11111111111111)_{4}$	$1/7 = (0. 11111111111111)_{8}$	$1/1 = (0. 33333333333333)_{4}$
$1/3 = (0. 22222222222222)_{7}$	$1/7 = (0. 22222222222222)_{15}$	$1/2 = (0. 33333333333333)_{7}$
$1/3 = (0. 33333333333333)_{10}$	$1/7 = (0. 33333333333333)_{22}$	$1/3 = (0. 33333333333333)_{10}$
$1/3 = (0. 44444444444444)_{13}$	$1/7 = (0. 44444444444444)_{29}$	$1/4 = (0. 33333333333333)_{13}$
⋮	⋮	⋮
$1/3 = (0. 99999999999999)_{28}$		
$1/3 = (0. AAAAAAAAAAAAAA)_{31}$		
⋮		

(小数は切り捨て表示で、末尾の…は省略している)

n進法において $1/k$ が $0. jjjjj\cdots$ となるのは、最大数字の約数の組み合わせである。

10進法 最大数字は9

$9 = 9 \cdot 1$	$1/9 = (0. 11111111111111)_{10}$
$9 = 3 \cdot 3$	$1/3 = (0. 33333333333333)_{10}$
$9 = 1 \cdot 9$	$1/1 = (0. 99999999999999)_{10}$

7進法 最大数字は6

$6 = 6 \cdot 1$	$1/6 = (0. 11111111111111)_{7}$
$6 = 3 \cdot 2$	$1/3 = (0. 22222222222222)_{7}$
$6 = 2 \cdot 3$	$1/2 = (0. 33333333333333)_{7}$
$6 = 1 \cdot 6$	$1/1 = (0. 66666666666666)_{7}$

6進法 最大数字は5

$5 = 5 \cdot 1$	$1/5 = (0. 11111111111111)_{6}$
$5 = 1 \cdot 5$	$1/1 = (0. 55555555555555)_{6}$

5進法 最大数字は4

$4 = 4 \cdot 1$	$1/4 = (0. 11111111111111)_{5}$
$4 = 2 \cdot 2$	$1/2 = (0. 22222222222222)_{5}$
$4 = 1 \cdot 4$	$1/1 = (0. 44444444444444)_{5}$

約数の性質から、一般的に $1/k$ のkと $0. jjjjj\cdots$ のjは「たすき掛け」の関係になる。例えば

~~$$1/3 = (0. 22222222222222)_{7}$$

$$1/2 = (0. 33333333333333)_{7}$$~~

$1/3 = (0. 33333333333333)_{10}$  や  $1/2 = (0. 22222222222222)_{5}$  の様に、両辺が同じ数字であるためには、最大数字が9や4等の平方数でなければならない。

10進法は $(3^2+1)$ 進法であるために、 $1/3 = 0.33333\cdots$  の関係が成立している。

9進法では  $1/3 = (0. 3)_{9}$  と有限小数になる。  $\frac{1}{k} = \frac{j}{jk} = (0. j)_{jk}$  となるのがその理由である。

一桁の有限小数の例

$1/3 = (0. 1)_{3}$	$1/7 = (0. 1)_{7}$	$1/1 = (0. 3)_{3}$ ← 実際は繰り上げて $1/1 = (1)_{3}$
$1/3 = (0. 2)_{6}$	$1/7 = (0. 2)_{14}$	$1/2 = (0. 3)_{6}$
$1/3 = (0. 3)_{9}$	$1/7 = (0. 3)_{21}$	$1/3 = (0. 3)_{9}$
$1/3 = (0. 4)_{12}$	$1/7 = (0. 4)_{28}$	$1/4 = (0. 3)_{12}$
⋮	⋮	⋮





10進法 → 5進法

$$5 = 10/2$$

$$\frac{j}{10} = \frac{j/2}{5}$$

$$2/10 = (0.1)_5$$

$$4/10 = (0.2)_5$$

$$8/10 = (0.4)_5$$

$$1/10 = (0.022222222222222)_5$$

$$3/10 = (0.122222222222222)_5$$

$$9/10 = (0.422222222222222)_5$$

$$1/10 \text{の分子の整数化} \quad \frac{0.5}{5} = \frac{0}{5^1} + \frac{2.5}{5^2} = \frac{0}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{2.5}{5^3} = \frac{0}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{2.5}{5^4} = \frac{0}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \dots$$

10進法 → 6進法

$$6 = 10/2+1$$

$$\frac{j}{10} = \frac{j/2}{6^1} + \frac{j/2}{6^2} + \frac{j/2}{6^3} + \frac{j/2}{6^4} + \frac{j/2}{6^5} + \frac{j/2}{6^6} + \dots$$

$$2/10 = (0.111111111111111)_6$$

$$4/10 = (0.222222222222222)_6$$

$$8/10 = (0.444444444444444)_6$$

$$1/10 = (0.033333333333333)_6$$

$$3/10 = (0.144444444444444)_6$$

$$9/10 = (0.522222222222222)_6$$

$$1/10 \text{の分子の整数化} \quad 6 \left( \frac{0.5}{6^{1+1}} + \frac{0.5}{6^{2+1}} + \frac{0.5}{6^{3+1}} + \frac{0.5}{6^{4+1}} + \dots \right) = \frac{0}{6^1} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \frac{3}{6^5} + \dots$$

10進法 → 7進法

$$49 = 100/2-1 = 7^2$$

100進法 → 49進法 を経由する

$$\frac{j}{100} = \frac{j/2-1}{49^1} + \frac{49-j/2}{49^2} + \frac{j/2-1}{49^3} + \frac{49-j/2}{49^4} + \frac{j/2-1}{49^5} + \frac{49-j/2}{49^6} + \dots$$

$$1/10 = \frac{10}{100} = \frac{4}{49^1} + \frac{44}{49^2} + \frac{4}{49^3} + \frac{44}{49^4} + \frac{4}{49^5} + \frac{44}{49^6} + \dots$$

$$4 = (04)_7 \quad 44 = (62)_7 \\ 1/10 = (0.04620462046204)_7$$

$$2/10 = \frac{20}{100} = \frac{9}{49^1} + \frac{39}{49^2} + \frac{9}{49^3} + \frac{39}{49^4} + \frac{9}{49^5} + \frac{39}{49^6} + \dots$$

$$9 = (12)_7 \quad 39 = (54)_7 \\ 2/10 = (0.12541254125412)_7$$

$$1/100 = \frac{1}{2} \frac{2}{100} = \frac{1}{2} \left( \frac{0}{49^1} + \frac{48}{49^2} + \frac{0}{49^3} + \frac{48}{49^4} + \dots \right) = \frac{0}{49^1} + \frac{24}{49^2} + \frac{0}{49^3} + \frac{24}{49^4} + \dots$$

$$24 = (33)_7 \\ 1/100 = (0.00330033003300)_7$$

10進法 → 16進法

$$16 = (10/2-1)^2$$

$$\frac{j}{10} = \frac{1.5j}{16^1} + \frac{1.5j}{16^2} + \frac{1.5j}{16^3} + \frac{1.5j}{16^4} + \frac{1.5j}{16^5} + \frac{1.5j}{16^6} + \dots$$

$$16 \cdot 0.5 = 8$$

$$2/10 = (0.33333333333333)_{16}$$

$$4/10 = (0.66666666666666)_{16}$$

$$8/10 = (0.CCCCCCCCCCCCCC)_{16}$$

$$1/10 = (0.19999999999999)_{16}$$

$$3/10 = (0.4CCCCCCCCCCCCC)_{16}$$

$$9/10 = (0.E6666666666666)_{16}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\uparrow\uparrow & & \\ 18 & 1.5 \cdot 1 = 1.5 & \\ 18 & \downarrow\downarrow & \\ 18 & \leftarrow 1 \ 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\uparrow\uparrow & & \\ 48 & 1.5 \cdot 3 = 4.5 & \\ 48 & \downarrow\downarrow & \\ 48 & \leftarrow 4 \ 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\uparrow\uparrow & & \\ D8 & 1.5 \cdot 9 = 13.5 & \\ D8 & \downarrow\downarrow & \\ D8 & \leftarrow D \ 8 & \end{array}$$

1/100 と 1/1000 の展開

$$0.01 = (0.0 \ 28F5C \ 28F5C \ 28F5C \ \dots)_{16}$$

$$0.001 = (0.00 \ 4189374BC6A7EF9DB22D0E560 \ 4189374BC6A7EF9DB22D0E560 \ \dots)_{16}$$

$$0.1 = (0.19999999999999\dots)_{16} \text{ との関係}$$

$$(0.19999999999999)_{16} + (0.19999999999999)_{16} / 2 = (0.26666666666666)_{16}$$

$$\text{循環節 } 16(16^5-1)/100 = (28F5C)_{16} = 0.15 \sum_{k=1}^5 16^k$$

$$0.01 = (0.0 \ 28F5C \ 28F5C \ 28F5C \ \dots)_{16} \text{ との関係}$$

$$(0.028F5C28F5C28F5C)_{16} + (0.028F5C28F5C28F5C)_{16} / 2 = (0.03D70A3D70A3D70A)_{16}$$

$$\text{循環節 } 16^2(16^5-1)/1000 = (4189374BC6A7EF9DB22D0E560)_{16} = 0.015 \sum_{k=1}^{5^2} 16^{k+1}$$

$$\begin{array}{r} 266666666 \\ 266666666 \\ 266666666 \\ 266666666 \ 3D70A3D70A \\ 266666666 \ 3D70A3D70 \\ 266666666 \ 3D70A3D7 \\ 266666666 \ 3D70A3D \\ 266666666 \ 3D70A3 \\ 266666666 \ 3D70A \\ +) \underline{\hspace{1cm}} \ 3D70A \\ 28F5C28 \ \dots \ 3D70 \\ \hspace{1.5cm} 3D7 \\ +) \underline{\hspace{1cm}} \ 4189374 \ \dots \end{array}$$

1/10000 の展開

$$0.0001 = (0.000 \ 68DB8BAC710CB295E9E1B089A027525460AA64C2F837B4A2339C0EBEDFA43FE5C91D14E3BCD35A858793DD97F62B6AE7D566CF41F212D77318FC504816F00 \ 68DB8BAC710CB295E9E1B089A027525460AA64C2F837B4A2339C0EBEDFA43FE5C91D14E3BCD35A858793DD97F62B6AE7D566CF41F212D77318FC504816F00 \ 68DB8BAC710CB295E9E1B089A027525460AA64C2F837B4A2339C0EBEDFA43FE5C91D14E3BCD35A858793DD97F62B6AE7D566CF41F212D77318FC504816F00 \ \dots)_{16}$$

$$\text{循環節 } 16^3(16^5-1)/10000 = (68DB8BAC710CB295E9E1B089A027525460AA64C2F837B4A2339C0EBEDFA43FE5C91D14E3BCD35A858793DD97F62B6AE7D566CF41F212D77318FC504816F00)_{16} = 0.0015 \sum_{k=1}^{5^3} 16^{k+2}$$

## カタラン数の生成

$\sqrt{6}$ は2.5に近い値であるが、その差は  
 $2.5 - \sqrt{6} = 0.0505102572168221$  であり、2倍すると  
 カタラン数(1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...)が出現する。

この数値は10を分母に持つ連分数と等しい。

この様にカタラン数を生成する数として $\sqrt{6}$ や10があるが、  
 他の進法で関係の深い数を調べる。

$$5 - 2\sqrt{6} = 0.101020514433644$$

$$\frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10}}}}} = 0.101020514422576$$

偶数進法では平方根との関係が解り易い。

$\sqrt{4} - \sqrt{3} = (0.10102120110113)_4$	$\sqrt{81} - \sqrt{80} = (0.10102050E266GC)_{18}$
$\sqrt{9} - \sqrt{8} = (0.10102052314010)_6$	$\sqrt{100} - \sqrt{99} = (0.10102050E22753)_{20}$
$\sqrt{16} - \sqrt{15} = (0.10102051654130)_8$	$\sqrt{121} - \sqrt{120} = (0.10102050E1K9B0)_{22}$
$\sqrt{25} - \sqrt{24} = (0.10102051443364)_{10}$	$\sqrt{144} - \sqrt{143} = (0.10102050E1I676)_{24}$
$\sqrt{36} - \sqrt{35} = (0.10102051236B30)_{12}$	$\sqrt{169} - \sqrt{168} = (0.10102050E1E5JF)_{26}$
$\sqrt{49} - \sqrt{48} = (0.10102051030987)_{14}$	$\sqrt{196} - \sqrt{195} = (0.10102050E1FG54)_{28}$
$\sqrt{64} - \sqrt{63} = (0.10102050E2A843)_{16}$	$\sqrt{225} - \sqrt{224} = (0.10102050E1LMJ1)_{30}$

簡単な平方根から構成される式と、10進法で平方根の値を求める式。

$2 - \sqrt{3} = (0.10102120110113)_4$	$\sqrt{2} = 1.41421356237309$
$3 - 2\sqrt{2} = (0.10102052314010)_6$	$(3 - 1/6^1 - 1/6^3 - 2/6^5 - 5/6^7 - 15/6^9)/2 = 1.41421357619836$
$5 - 2\sqrt{6} = (0.10102051443364)_{10}$	$\sqrt{6} = 2.44948974278317$
$7 - 4\sqrt{3} = (0.10102051030987)_{14}$	$(5 - 1/10^1 - 1/10^3 - 2/10^5 - 5/10^7 - 14/10^9)/2 = 2.449489743$
$8 - 3\sqrt{7} = (0.10102050E2A843)_{16}$	$\sqrt{3} = 1.73205080756887$
	$(7 - 1/14^1 - 1/14^3 - 2/14^5 - 5/14^7 - 14/14^9)/4 = 1.73205080757151$
	$\sqrt{7} = 2.64575131106459$
	$(8 - 1/16^1 - 1/16^3 - 2/16^5 - 5/16^7 - 14/16^9)/3 = 2.64575131106539$

奇数進法も加えn進法で統一した式と、10進法による平方根の簡略化式。

←n進法 10進法→

$$\begin{aligned}
 ((10)_3 - \sqrt{(12)_3}) / (2)_3 &= (0.10102211002010)_3 = (3 - \sqrt{5}) / 2 \\
 ((10)_4 - \sqrt{(30)_4}) / (2)_4 &= (0.10102120110113)_4 = (4 - \sqrt{12}) / 2 = 2 - \sqrt{3} \\
 ((10)_5 - \sqrt{(41)_5}) / (2)_5 &= (0.10102103043014)_5 = (5 - \sqrt{21}) / 2 \\
 ((10)_6 - \sqrt{(52)_6}) / (2)_6 &= (0.10102052314010)_6 = (6 - \sqrt{32}) / 2 = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} \\
 ((10)_7 - \sqrt{(63)_7}) / (2)_7 &= (0.10102052062612)_7 = (7 - \sqrt{45}) / 2 = 7/2 - (3/2)\sqrt{5} \\
 ((10)_8 - \sqrt{(74)_8}) / (2)_8 &= (0.10102051654130)_8 = (8 - \sqrt{60}) / 2 = 4 - \sqrt{15} \\
 ((10)_9 - \sqrt{(85)_9}) / (2)_9 &= (0.10102051547624)_9 = (9 - \sqrt{77}) / 2 \\
 ((10)_{10} - \sqrt{(96)_{10}}) / (2)_{10} &= (0.10102051443364)_{10} = (10 - \sqrt{96}) / 2 = 5 - \sqrt{24} = 5 - 2\sqrt{6} \\
 ((10)_{11} - \sqrt{(A7)_{11}}) / (2)_{11} &= (0.1010205133A136)_{11} = (11 - \sqrt{117}) / 2 = 11/2 - (3/2)\sqrt{13} \\
 ((10)_{12} - \sqrt{(B8)_{12}}) / (2)_{12} &= (0.10102051236B30)_{12} = (12 - \sqrt{140}) / 2 = 6 - \sqrt{35} \\
 ((10)_{13} - \sqrt{(C9)_{13}}) / (2)_{13} &= (0.10102051133A47)_{13} = (13 - \sqrt{165}) / 2 \\
 ((10)_{14} - \sqrt{(DA)_{14}}) / (2)_{14} &= (0.10102051030985)_{14} = (14 - \sqrt{192}) / 2 = 7 - \sqrt{48} = 7 - 4\sqrt{3} \\
 ((10)_{15} - \sqrt{(EB)_{15}}) / (2)_{15} &= (0.10102050E2C8D7)_{15} = (15 - \sqrt{221}) / 2 \\
 ((10)_{16} - \sqrt{(FC)_{16}}) / (2)_{16} &= (0.10102050E2A84A)_{16} = (16 - \sqrt{252}) / 2 = 8 - \sqrt{63} = 8 - 3\sqrt{7}
 \end{aligned}$$


---

最初はn進法の10つまりnで、ルートの中の数字は(n-1)と(n-4)である(4進法以降)。

次の様にも書ける。

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 ((10)_8 - \sqrt{(100)_8 - (4)_8}) / (2)_8 &= (0.10102051654130)_8 \\
 ((10)_{10} - \sqrt{(100)_{10} - (4)_{10}}) / (2)_{10} &= (0.10102051443364)_{10} \\
 ((10)_{12} - \sqrt{(100)_{12} - (4)_{12}}) / (2)_{12} &= (0.10102051236B30)_{12} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

n進法では同じ $(100)_n - (4)_n$ であっても、10進法から見ると  $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$  であるので、

nの値が変わると、関係が深い平方根の値も変化する。

$$\begin{aligned}
 n=8 & : 6 \cdot 10 = 60 = (2^2)3 \cdot 5 \rightarrow \sqrt{15} \\
 n=10 & : 8 \cdot 12 = 96 = (2^4)2 \cdot 3 \rightarrow \sqrt{6} \\
 n=12 & : 10 \cdot 14 = 140 = (2^2)5 \cdot 7 \rightarrow \sqrt{35}
 \end{aligned}$$


---

連分数による生成は単純であり、n進法のnを分母にした次の形式の連分数がカタラン数を生成する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7 - \frac{1}{7}}}}} & \frac{1}{8 - \frac{1}{8 - \frac{1}{8 - \frac{1}{8 - \frac{1}{8}}}}} & \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10 - \frac{1}{10}}}}} & \frac{1}{12 - \frac{1}{12 - \frac{1}{12 - \frac{1}{12 - \frac{1}{12}}}}} \\ = (0.10102052061436)_7 & = (0.10102051652777)_8 & = (0.10102051442257)_{10} & = (0.10102051235A47)_{12} \end{aligned}$$

10進法と同様に、n進法においても10(=n)を分母にした連分数がカタラン数を生成する。

(10)<sub>n</sub>によるカタラン数の生成は、進法に共通である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(10)_8 - \frac{1}{(10)_8 - \frac{1}{(10)_8 - \frac{1}{(10)_8 - \frac{1}{(10)_8}}}}} \\ = (0.10102051652777)_8 \end{aligned}$$

(10)<sub>n</sub>がカタラン数生成の基本数値であるが、(100)<sub>n</sub>や(1000)<sub>n</sub>等も同様である。

$$((100)_8 - \sqrt{(10000)_8 - (4)_8}) / (2)_8 = (0.01000100020005001600520204065)_8$$

$$(100 - \sqrt{10000 - 4}) / 2 = 0.01000100020005001400420132046$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8^2 - \frac{1}{8^2 - \frac{1}{8^2 - \frac{1}{8^2 - \frac{1}{8^2}}}}} \\ = (0.01000100020005001600510172055)_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(100)_8 - \frac{1}{(100)_8 - \frac{1}{(100)_8 - \frac{1}{(100)_8 - \frac{1}{(100)_8}}}}} \\ = (0.01000100020005001600510172055)_8 \end{aligned}$$

これらの数値には、生成間隔を広くする効果が有る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100 - \frac{1}{100 - \frac{1}{100 - \frac{1}{100 - \frac{1}{100}}}}} \\ = 0.010001000200050014004101220365 \end{aligned}$$

(10)<sub>n</sub>や(100)<sub>n</sub>等の数値は生成間隔を指定するものである。

本質的な生成機能は、カタラン数の母関数に対応する平方根の式や、連分数の式自体にある。

2019/03/01 新規 (n進法の筆算)  
 2019/03/05 追加 (同一数字の小数)  
 2019/03/13 追加 (カタラン数の生成)  
 2021/02/24 追加 (分数の小数展開)

数学研究ノート

小規模更新日  
 今回 2019/05/xx  
 前回 2018/05/04